

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

М.К. Ермаков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1

Аннотация

В работе рассмотрены вопросы обоснования и применения матричных методов для решения уравнений Навье – Стокса. Рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости, вязкой слабо сжимаемой жидкости и течений вязкой несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности. Вынужденные течения считаются изотермическими (кроме течения слабо сжимаемой жидкости), естественно конвективные течения – неизотермическими. Для решения уравнений используется матричный подход на основе метода Ньютона-Крылова. Для решения задач с неизвестной свободной поверхностью используется расщепление для расчета гидродинамики и формы свободной поверхности. Показано преимущество в производительности расчетов в формулировке для функции тока по сравнению с формулировкой для естественных переменных. Показана эффективность расчетов на основе матричного метода для рассмотренных течений. Прогресс в расчете формы свободной поверхности внушает уверенность в возможности моделирования таких задач без расщепления. Обсуждаются достоинства, недостатки и пути совершенствования матричного метода.

A STUDY OF MATRIX METHODS OPPORTUNITIES FOR A SOLUTION OF THE NAVIER – STOKES EQUATIONS

The questions of a well grounding and an application of matrix methods for a solution of the Navier – Stokes equations are considered. Flows of viscous incompressible fluids, viscous weak compressible fluids and flows of viscous incompressible fluids with a presence of a free surface are under consideration. Forced flows are considered to be isothermal (beside a flow of weak compressible fluid) and natural convective flows are considered to be non-isothermal. The matrix approach based on the Newton – Krylov method is used. A splitting for hydrodynamics and free-surface shape calculation is used for problems with the unknown free surface. An advantage in a calculation performance of an equation formulation in a term of the stream function versus a formulation for the natural variables is demonstrated. An efficiency of the matrix based calculations for the considered flows is demonstrated. A progress in free surface shape calculations inspires a sure in opportunity of a modelling of these flows without splitting. Advantages, disadvantages and ways of a progress of the matrix method are finally discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модели для описания движения жидкости, газа и плазмы отличаются большим разнообразием. Это связано, во-первых, с наличием двух подходов к описанию движения, основанных либо на наблюдении за выделенной точкой пространства в подходе Эйлера, либо на наблюдении за выделенной точкой жидкости в подходе Лагранжа [1, 2]. Во-вторых, это связано с различными свойствами систем уравнений, описывающих движение жидкости, включающих течения несжимаемой жидкости, сжимаемой жидкости или течения со свободными поверхностями. Многообразие моделей механики жидкости включает в себя также слабо сжимаемые течения, течения с фазовыми переходами, гиперзвуковые многофазные аэрофизические течения с химической кинетикой и излучением [3], течения в пористых средах, взаимодействие жидкостей и структур. Большим самостоятельным разделом является описание движения плазмы, основанное, в том числе на уравнениях для функции распределения, влиянии электрических и магнитных полей [4]. Большое количество подходов существует и для описания переходного и турбулентного движения жидкости, в частности описание для осредненных по Рейнольдсу уравнений, прямое численное моделирование, моделирование на основе метода крупных вихрей, а также моделирование на основе различных гибридных подходов.

Самостоятельным важным подходом является линейный анализ устойчивости течений определения критических течений и бифуркаций [5]. Большим разнообразием отличаются многофазные модели, в том числе со свободными поверхностями и фазовыми переходами [6, 7].

Разнообразие моделей для течений жидкости и газа приводит также к значительному разнообразию методов их моделирования. Методы вычислительной механики жидкости наследуют особенности моделей и составляют большие отдельные ветви вычислительного подхода. Традиционно, методы моделирования составляют описание сжимаемой жидкости, несжимаемой жидкости и описание более сложных течений [8-13]. С точки зрения построения схем и перехода от непрерывных к конечномерным моделям, основными подходами являются методы конечных разностей и конечных объемов, метод конечных элементов, спектральные методы [14, 15]. Для решения уравнения Пуассона эффективно используется метод граничных элементов [16]. Наиболее важными вопросами моделирования являются аппроксимация уравнений, сходимость решения и методы решения уравнений. Аппроксимация и метод решения разностных уравнений составляют собственно разностную схему, а сходимость, являющаяся важной характеристикой численной схемы, определяется аппроксимацией. Аппроксимация неотделима от используемой модели жидкости,

поскольку она должна наследовать математические свойства уравнений и их решений. Что же касается методов решений разностных уравнений, то для них возможно построение общего подхода, основанного на решении систем уравнений или матричного подхода. В данной работе под матричным методом понимается представление решение в виде вектора, а уравнений для невязок в виде векторного уравнения для этого вектора. При этом для решения этой системы уравнений мы будем использовать общие методы решения матричных систем.

История применения матричных методов в нашей стране для уравнений Навье – Стокса ведет, видимо, с работы [17], для несжимаемой жидкости метод применялся, в частности, в [18], и для течений сжимаемого газа метод применялся, в работе [19]. Современные вычислительные возможности позволяют использовать новые возможности решения больших систем линейных уравнений и систематически исследовать возможности матричных методов для моделирования на основе уравнений Навье – Стокса.

2. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КРЫЛОВА

2.1. Метод Ньютона для систем уравнений

Таким образом, для исходных дифференциальных уравнений осуществляется дискретизация неизвестных и на основе дискретизованных неизвестных осуществляется аппроксимация дифференциальных уравнений. Невязки дискретизованных уравнений являются нелинейными векторными уравнениями и являются объектом для применения матричного метода. Линеаризованные уравнения для невязок представляют собой систему уравнений с некоторой матрицей, к которой и будут применяться матричные методы. Такой подход, будучи универсальным, имеет ряд существенных преимуществ перед традиционными, более эффективными с точки зрения скорости вычислений. Важным преимуществом является собственно сама универсальность, которая позволяет использовать единые разработанные приемы и средства для решения численных уравнений. Таким образом, решив проблему решения матричных уравнений, мы далее можем для всех задач рассматривать только первую часть построения численной схемы – аппроксимацию уравнений. И это является наиболее важной частью подхода, поскольку современные методы отличаются очень большой сложностью. Далее, в силу собственно матричного подхода, получаемая на каждом шаге схема является полностью неявной, что позволяет избежать обременительных ограничений на шаг по времени для схем с установлением. Помимо этого, в методе отсутствует расщепление и нет избыточности, присутствующих в традиционных схемах. Использование метода Ньютона – Канторовича [5] (именуемого в зарубежной литературе методом Ньютона – Рафсона [20]) в матричной форме позволяет добиться второго порядка сходимости, в результате чего уравнения решаются за несколько итераций. Такой “инструмент” может быть как основным, так дополнительным в численной “кухне” вычислителя. Так как при таком подходе построение численной схемы сводится главным образом к записи невязок, то благодаря этому упрощается перенос используемых частей алгоритмов в другие коды. Данный подход также легко расширяется на

анализ линейной устойчивости, в которой требуется решать спектральную задачу с нахождением собственных чисел и собственных векторов.

В силу того, что подход позволяет избегать части схемы, связанной с решением разностных уравнений, и, соответственно, существенно экономить время разработки схемы, его применение для сложных задач (включающих, например, много различных физических процессов) является весьма целесообразным. В данной работе матричный подход применяется для решений задач механики жидкости, в том числе со свободными поверхностями.

Применение метода Ньютона для системы векторных уравнений $f(\vec{x}) = 0$ приводит к вычислению по следующей итерационной схеме

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{f(x^{[k]})}{f'(x^{[k]})}, k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

где $f'(x)$ - матрица Якоби. Появление матрицы Якоби в знаменателе эквивалентно необходимости решения системы линейных уравнений с данной матрицей.

2.2. Методы подпространств Крылова

Наиболее популярными для решения больших несимметричных систем уравнений на основе подпространств Крылова являются обобщенный метод минимизации невязок с рестартами GMRes(n) и стабилизированный метод бисопряженных градиентов BiCGStab [21]. Подпространства Крылова являются оболочками следующего вида:

$$K_m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}, r_0 = b - Ar_0 \quad (2)$$

Опыт их применения для решения систем механики жидкости не показал сколько-нибудь заметных преимуществ более популярного и несколько более сложного и ресурсоёмкого обобщенного метода минимизации невязок перед стабилизированным методом бисопряженных градиентов, поэтому для вычислений использовался последний. Для применения в задачах механики жидкости для использования метода Ньютона в матричном виде был использован пакет Numerical Recipes [20], а для решения разреженных линейных систем был адаптирован пакет Sparskit [22].

2.3. Предобуславливание

Предобуславливателем для матрицы A называется спектрально близкая к ней матрица M , которая легко обращается. Умножение системы на матрицу M^{-1} позволяет существенно понизить число обусловленности исходной матрицы системы и добиться улучшения сходимости, часто весьма значительного. Произведение же матрицы M^{-1} на вектор вычисляется благодаря тому, что матрица M – легкообращаема.

В настоящее время используется два основных подхода для построения предобуславливателей. Первый, более традиционный подход основан на приближенном LU разложении матрицы, второй основан на построении приближенной обратной матрицы. В обоих подходах реализуется отбрасывание малых элементов матриц для уменьшения количества их ненулевых элементов. Согласно публикациям, подход с построением приближенной обратной матрицы является более робастным и эффективным, хотя и более ресурсоёмким.

В качестве пакета, реализующего подход с приближенным LU разложением, можно назвать открытый пакет Sparskit [22], а подхода, основанного на вычислении приближенной обратной матрицы, пакет с ограниченным доступом Hpack [23].

2.4. Метод Ньютона – Крылова без вычисления Якобиана и распараллеливание

Дополнительные возможности для упрощения вычислительных схем и ускорения расчетов предоставляет вариант метода Ньютона-Крылова без вычисления Якобиана [24]. Так как в методах подпространств Крылова все вычисления основаны на произведениях Якобиана на вектора, то эти произведения можно заменить на вычисления производной невязок по направлению вектора

$$J(x)v = \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \tag{3}$$

где ε – малое число. Однако, так как большинство систем требуют для их решения преобуславливания матриц, то выигрыш от использования такого подхода может быть незначительным. В то же время, для систем невысокой размерности, или расчетов нестационарных уравнений с малым шагом по времени подход без вычисления Якобиана может быть весьма продуктивным.

Отдельной проблемой является проведение вычислений по методу подпространств Крылова на параллельных компьютерах [21]. Если матрично-векторное произведение распараллеливается без проблем, то вычисление преобуславливателя и решение линейной системы сталкивается с существенными трудностями. Поэтому, использование метода Ньютона – Крылова без вычисления Якобиана и без преобуславливания уравнений является весьма перспективным для распараллеливания.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

3.1. Выбор переменных

Начнем рассмотрение применения к задачам механики жидкости с уравнений Навье – Стокса для несжимаемой изотермической жидкости. Традиционно для двумерных задач уравнения Навье – Стокса формулируются для численного решения либо в естественных переменных (скорость-давление)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= 0 \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \nabla) \vec{V} &= -\nabla p + \Delta \vec{V}, \end{aligned} \tag{4}$$

где V – вектор скорости, p – давление, либо в переменных завихренность-функция тока

$$\begin{aligned} \omega_t + (\vec{V} \nabla) \omega &= \Delta \omega \\ \Delta \Psi &= -\omega, \end{aligned} \tag{5}$$

где Ψ – функция тока, $\omega = \operatorname{rot} V$ – завихренность [25]. Возможен также и подход с использованием только функции тока, используемый, главным образом в теоретических исследованиях

$$\Delta \Psi_t + \Psi_x \Delta \Psi_y - \Psi_y \Delta \Psi_x = \Delta \Delta \Psi. \tag{6}$$

Сравним по эффективности подход с формулировкой для естественных переменных и подход с исполь-

зованием функции тока. Заметим, что подход в естественных переменных при определении компонент скорости на гранях соответствующих ячеек и давления в центрах ячеек полностью соответствует подходу с функцией тока, определенной в узлах ячеек (рис.1). Это означает, что для обоих подходов возможно построение схем с полным соответствием значений скорости и функции тока.

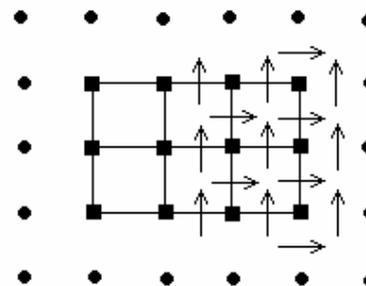


Рис. 1. Схема области. Граница области и ячейки ограничены сплошными линиями. Основные точки расположения функции тока обозначены квадратами, дополнительный слой – кругами. Стрелками обозначены компоненты скорости

Перейдем к вопросу аппроксимации уравнений. Поскольку уравнение для функции тока имеет четвертый порядок, то для него ставится еще по одному граничному условию на каждой границе. Чтобы реализация разностной схемы была однородной, введем дополнительный слой точек для постановки ещё одного граничного условия.

Это граничное условие в «заграничных» точках имеет следующий вид

$$\Psi_{\Gamma+1} - \Psi_{\Gamma-1} = 0, \tag{7}$$

где индекс Γ соответствует границе области.

Можно обойтись и без введения дополнительного слоя точек, и тогда граничные условия нужно было бы вводить в уравнение для функции тока в приграничной ячейке. Следуя этой логике, в граничных ячейках, так как значение функции тока в них постоянно на каждой стенке и, как правило, известно заранее, тоже нет необходимости, и от них можно избавиться. Однако, как указано выше, при этом запись уравнения в приграничных точках становится «неоднородной». Вместе с тем, избавляться от «заграничного» слоя точек необходимо, например, при наличии углов у границы, если границы идут вдоль разных направлений прямоугольной сетки.

3.2. Течение с движущейся верхней крышкой

В качестве примера рассмотрим классическую задачу с движущейся крышкой [26]. В табл. 1 приведены результаты сравнения расчетов при использовании подхода с естественными переменными и подхода с формулировкой для функции тока. Во втором случае в возникающей матрице возникает примерно в два раза меньше элементов, а время расчета различается почти на порядок.

Таблица 1. Время расчета для $Re = 100$, с

	65x65	129x129	257x257
Функция тока	2	36	510
Естественные переменные	20	264	-

Результаты моделирования для значений числа Рейнольдса равным 0, 100, 5000 и 10000 представлены на рис. 2, идентичны для обоих подходов и соответствуют результатам других авторов (см., например, [24]).

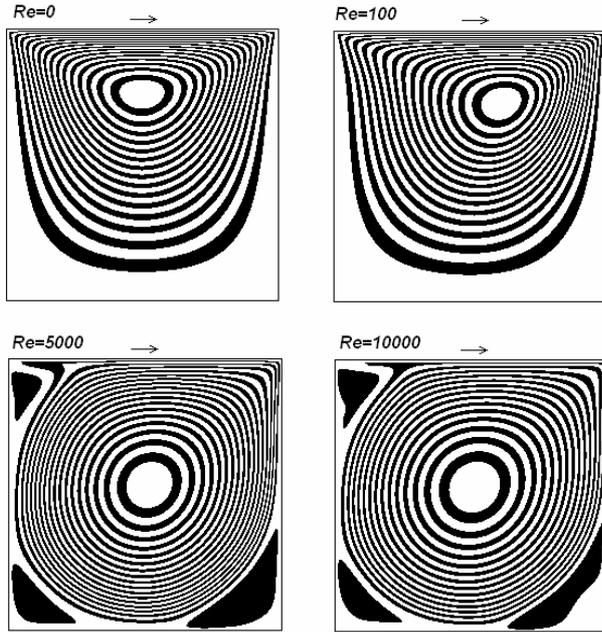


Рис. 2. Функция тока для задачи с движущейся верхней крышкой для чисел Рейнольдса, равных 0, 100, 5000 и 10000. Направление движения крышки показано стрелкой

Результаты, полученные матричным методом, также соответствуют результатам компьютерной лаборатории COMGA, являющейся сертифицированным, разработанным в ИПМех РАН, вычислительным кодом [27–29].

3.3. Течение с движущейся верхней крышкой над волнистым профилем

Для демонстрации возможностей описанного подхода рассмотрим периодическое изотермическое течение типа Куэтта над волнистой поверхностью. Пусть движущаяся граница соответствует вертикальной координате 0, а волнистая периодическая поверхность задается формулой $y=h(x)$. Для адаптации метода введем традиционное преобразование переменных, отображающее криволинейную область в область прямоугольной формы. Используемое преобразование таково:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x)}. \quad (8)$$

Производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{h'}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (9)$$

а Якобиан преобразования J соответственно равен

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{h}. \quad (10)$$

Исходные уравнения в консервативном виде

$$E_x + F_y = 0 \quad (11)$$

преобразуются в новых переменных в консервативный вид следующим образом:

$$\left(\frac{E\xi_x + F\xi_y}{J} \right)_\xi + \left(\frac{E\eta_x + F\eta_y}{J} \right)_\eta = 0. \quad (12)$$

Для моделирования использовались уравнения в естественных переменных, преобразованные с помощью (8) к виду (12) с периодическими граничными условиями. На рис. 3 представлена функция тока для различных чисел Рейнольдса.

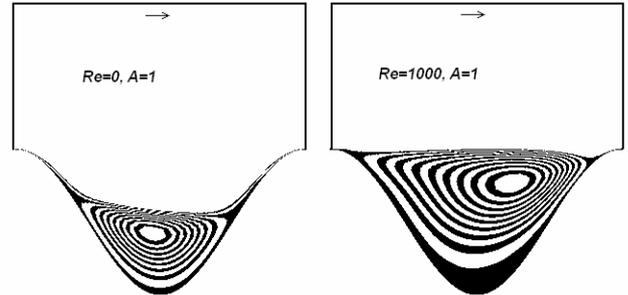


Рис. 3. Функция тока в области возвратного течения для чисел Рейнольдса 0 и 1000, амплитуда профиля равна 1

Видно, что размер области и центр возвратного течения зависят от числа Рейнольдса. При числе Рейнольдса, равном 100 и амплитуде синусоидального профиля менее 0.3 возвратное течение отсутствует.

3.4. Обтекание цилиндра несжимаемой жидкостью

Рассмотрим задачу об обтекании цилиндра потоком несжимаемой жидкостью. В данной задаче имеются три критических числа Рейнольдса. Первое критическое число Рейнольдса связано с появлением вторичного вихря за цилиндром, второе критическое число связано с двумерной потерей устойчивости течения и третье критическое число связано с трехмерной потерей устойчивости течения [30]. Критические числа Рейнольдса равны примерно 5, 40 и 200. Уравнение для функции тока в полярной системе координат (r, θ) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\Psi_\theta^2}{r} \right)_{r\theta} - \frac{1}{r^2} (\Psi_r \Psi_\theta)_{\theta\theta} - \frac{1}{r} (\Psi_r^2)_\theta + \right. \\ & \left. + (\Psi_r \Psi_\theta)_{rr} - (\Psi_r^2)_{\theta\theta} + \left(\frac{\Psi_r \Psi_\theta}{r} \right)_r \right] = \\ & = \frac{1}{r} \left[r \left(\frac{\Psi_\theta}{r} \right)_r \right]_{r\theta} + \frac{1}{r^3} (\Psi_{\theta\theta} - \Psi)_{\theta\theta} + \frac{2}{r^3} \Psi_{r\theta\theta} + \\ & + r (r \Psi_{rr})_{rr} + \left(\frac{1}{r} \Psi_{r\theta\theta} - \Psi_r \right)_r - \left(\frac{2}{r^2} \Psi_{\theta\theta} \right)_r \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия на поверхности цилиндра – непротекание и равенство нулю касательной компоненты скорости. На внешней границе расчетной области с наветренной стороны задаются условия набегающего потока, с подветренной стороны – мягкие граничные условия. На рис. 4 представлена функция тока для чисел Рейнольдса, определенных по радиусу цилиндра, равных 0, 10, 20 и 40. Для нулевого числа Рейнольдса обтекание симметричное, для ненулевых – имеются зоны возвратного течения, увеличивающиеся с числом Рейнольдса.

Время расчета варианта на сетке 161x161 составляет две минуты на персональном компьютере с частотой процессора 3.2 GHz. На рис. 5 имеется хорошее качественное совпадение численных результатов и экспериментальных данных [30] при числе Рейнольдса, равному 28.4.

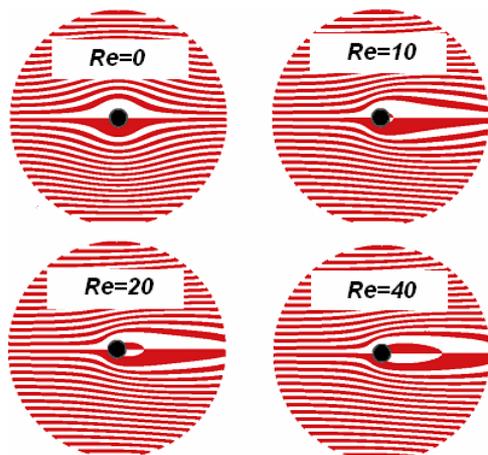


Рис. 4. Функция тока при обтекании цилиндра для чисел Рейнольдса 0, 10, 20 и 40



Рис. 5. Сравнение численного расчета (слева) и эксперимента (справа) при обтекании для числа Рейнольдса 28.4

4. ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

4.1. Методы и подходы

Свободной поверхностью является граница области, внутренняя или внешняя, заранее неизвестная, на которой выполняются некоторые условия согласования решения. Такой поверхностью, например, может быть свободная поверхность жидкости, деформируемая благодаря движению жидкости. Для непроникающих многофазных сред свободной границей могут быть границы пузырей и капель, фронты плавления/кристаллизации и испарения/конденсации, являющиеся фазовыми переходами. Свободными поверхностями также называют недеформируемые границы жидкости, свободные от внешних касательных напряжений (в этом случае скорость на этой границе является заранее неизвестной). При сверхзвуковом обтекании затупленных тел потоком сжимаемого газа отошедшая ударная волна также может рассматриваться как свободная поверхность.

При использовании сеточных методов имеются два основных подхода к взаимному расположению сетки и свободной поверхности (разрыву). В первом случае используется сетка, на которой разрыв выделен, во втором случае сетка не связана с разрывом и является, как правило, фиксированной. Подход с выделением разрыва является более предпочтительным с точки зрения точности постановки граничных условий на свободной поверхности и просто точности её определения. Однако, часто топология свободной поверхности может не позволить выделить её сеткой. Подход

без выделения разрыва (с фиксированной сеткой) является более универсальным и не приводит к искривлению ячеек сетки, однако может потребовать, чтобы свободная поверхность имела ненулевую толщину, например, в методе энтальпийной формулировки для задач плавления/кристаллизации [6]. Методами без выделения разрыва являются VOF [6] и Level Set [31]. Методы с выделением разрыва связаны, как правило, с введением преобразования координат. Отдельно стоят лагранжевы методы описания разрывов с выделением последних [32].

4.2. Методы расчет формы свободной поверхности

Прямолинейный путь решения задачи со свободной поверхностью заключается в использовании расщепления в виде итерационного процесса, в котором имеется отдельный шаг расчета гидродинамики при фиксированной форме свободной поверхности и отдельный шаг с расчетом формы свободной поверхности при фиксированном течении жидкости. Если расчет гидродинамики для фиксированной формы поверхности является решенной задачей, то расчет формы свободной поверхности пока представляет определенные сложности. Имеющийся опыт расчета свободной поверхности в задаче о жидкой полужоне состоял в использовании метода стрельбы из одной точки области в другую при наличии дополнительного ограничения в виде постоянства объема или величины контактного угла [33]. Особенностью расчета свободной поверхности является необходимость определения дополнительного параметра, являющегося разностью давлений с разных сторон от свободной поверхности. С математической точки зрения задача о нахождении формы свободной поверхности при наличии поверхностного натяжения относится к классу эллиптических уравнений. Наиболее простой прием решения такого уравнения состоит в переходе к параболическому уравнению путем введения фиктивного времени и расчета до установления. Аккуратно записанный таким образом алгоритм полностью себя оправдал как в явной, так и неявной формулировке, которая позволила существенно увеличить шаг интегрирования по фиктивному времени. Применение матричной методики с использованием метода Ньютона позволило полностью отказаться от метода установления и получать форму свободной поверхности за несколько итераций. Успешность применения метода Ньютона-Крылова для раздельного определения гидродинамического течения и формы поверхности дает определенную уверенность в возможности совместного расчета гидродинамики и формы свободной поверхности без расщепления. Уверенность также имеется в использовании этих подходов для расчета свободных поверхностей, зависящих от двух координат.

4.3. Определяющие уравнения

Рассмотрим несколько примеров конвективного течения при наличии свободной поверхности. Дно и боковые границы будем считать твердыми поверхностями, а верхнюю границу – свободной. Уравнения неразрывности, движения и притока тепла имеют следующий вид:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

$$(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\nabla p + \Delta\vec{V} + Gr T$$

$$\text{Pr}(\vec{V}\nabla)T = \Delta T \tag{14}$$

где V – вектор скорости, p – давление, T – температура. Граничные условия на свободной поверхности включают в себя кинематическое граничное условие, баланс нормальных и касательных напряжений и тепловое граничное условие:

$$V_n = 0$$

$$p - p_0 = \bar{n}\bar{\sigma}\bar{n} - \frac{\sigma}{R} + \rho g z$$

$$\bar{\tau}\bar{\sigma}\bar{n} + \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\tau}} = 0 \tag{15}$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -H(T - T_\infty),$$

где n и τ определяют вектор нормали и касательные вектора, S – тензор скоростей деформаций, ρ – плотность, g – ускорение силы тяжести, z – вертикальная координата, σ – поверхностное натяжение, R – радиус кривизны поверхности, k – коэффициент теплопроводности. Определяющими параметрами задачи являются числа Грасгофа, Прандтля, Бонда, Марангони, Био.

4.3. Конвекция при подогреве сбоку

Рассмотрим течение в каверне со свободной поверхностью при боковом подогреве [34]. Восходящий конвективный поток жидкости у горячей стенки создает горизонтальный перепад давления, который ведет к деформации поверхности. Интенсивность подъемного течения у стенок определяется числами Грасгофа и Прандтля. Отклонению формы от горизонтального препятствует вес жидкости, превышающий нижний уровень свободной поверхности. Величина такого влияния определяется числом Бонда. Свободная поверхность и дно предполагаются теплоизолированными, действием поверхностного натяжения пренебрегалось. Расчет занимал около двадцати минут на сетке порядка 81x81, так как требовалось порядка сотни внешних итераций для сходимости формы свободной поверхности и гидродинамических полей.

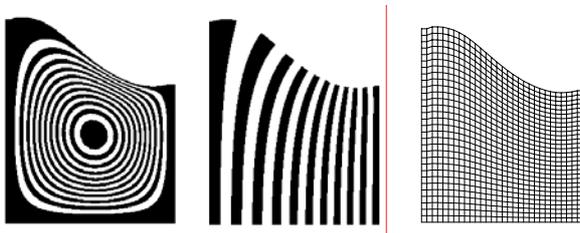


Рис. 6. Функция тока, температура и расчетная сетка для задачи со свободной поверхностью при боковом подогреве

4.4. Термогравитационная и термокапиллярная конвекция при локальном донном подогреве

Рассмотрим далее тонкий слой жидкости в кювете с локализованным донным подогревом. Свободная верхняя поверхность предполагается теплоизолированной, а температура боковых стенок и остальной части дна фиксирована. Локализованный донный нагрев служит упрощенной моделью действия лазерного

луча для оптически тонкой жидкости [35]. Рассмотрим отдельно случаи термогравитационной и термокапиллярной конвекции. Результаты моделирования приведены на рис. 7. Видно, что в полном соответствии с теоретическими представлениями, действие подъемной силы (термогравитационная конвекция) приводит к повышению уровня жидкости над пятном нагрева, а действие термокапиллярных сил приводит к понижению уровня жидкости над пятном нагрева.

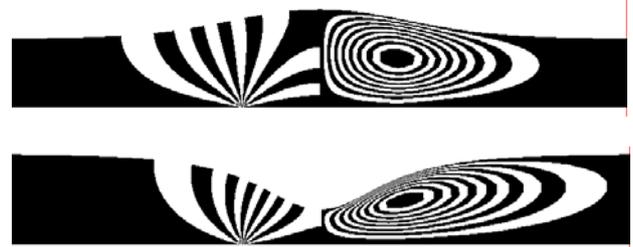


Рис.7. Температура (слева) и функция тока (справа) при термогравитационной конвекции (сверху) и термокапиллярной конвекцию (снизу)

5. ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО СЛАБОСЖИМАЕМОГО ГАЗА С ЛОКАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ В КАНАЛЕ

5.1. Определяющие уравнения

Рассмотрим течение вязкого теплопроводного сжимаемого газа в канале с локальным объемным тепловыделением, являющегося упрощенной моделью воздействия лазерного излучения на поток газа [36]. Уравнения неразрывности, импульса, притока тепла и состояния для стационарного течения в безразмерном виде имеют следующий вид:

$$\text{div}(\rho\vec{V}) = 0$$

$$\rho(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}}\left(\Delta\vec{V} + \frac{1}{3}\nabla(\text{div}\vec{V})\right) + \frac{1}{Fr}\rho g$$

$$\vec{V}\nabla T = -(\gamma - 1)\rho T \text{div}\vec{V} + \frac{\lambda}{\text{Pr Re}}\Delta T + Q$$

$$p = \rho T,$$

где Re и Fr , соответственно, числа Рейнольдса и Фруда, Q – объемное тепловыделение, локализованное в малой области канала.

Считая, что течение газа является существенно дозвуковым, осуществим фильтрацию акустических возмущений [37]. В результате уравнения с введением функции тока вместо скорости и давления по формулам

$$U = T\Psi_y, \quad V = -T\Psi_x \tag{17}$$

примут следующий вид:

$$\text{Re}(\Psi_y F_x - \Psi_x F_y + \Psi_{yy} T_x \Psi_y + \Psi_{xy} (T_x \Psi_y - T_y \Psi_x) - \Psi_{xx} T_y \Psi_x) = \Delta F$$

$$\text{Pr Re}(T_x \Psi_y - T_y \Psi_x) = \Delta T + Q$$

$$\rho T = 1,$$

где

$$F = (T\Psi_x)_x + (T\Psi_y)_y, \tag{19}$$

причем

$$\operatorname{div} \vec{V} = T_x \Psi_y - T_y \Psi_x. \quad (20)$$

Переход к функции тока связан с тем, что вычисления в естественных переменных (скорость-давление) не приводили к сходимости итераций. Возможно, это было связано с тем, что потоки массы по границе области не были автоматически равны нулю, что имеет место при введении функции тока.

5.2. Примеры течений

На рис. 8 приведены распределения температуры в трех режимах течения, характерных для малых, средних и больших чисел Рейнольдса. При малом числе Рейнольдса (сверху) диффузия полностью доминирует над конвекцией и весь газ нагревается, проходя область локального тепловыделения. При сравнительно большом числе Рейнольдса (снизу) имеется существенная стратификация в нагреве газа в канале.

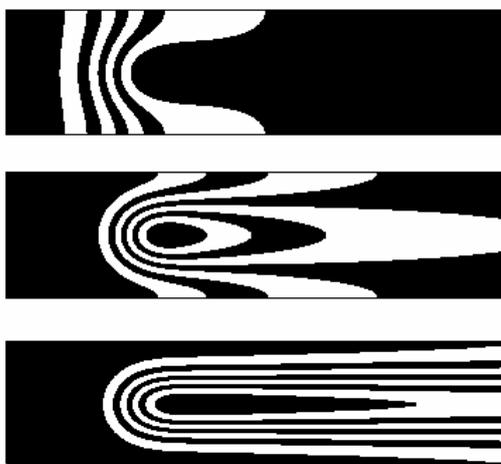


Рис. 8. Температура в канале (вдвух газа слева). Число Рейнольдса течения в канале увеличивается сверху вниз

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы обоснования и применения матричных методов для решения уравнений Навье–Стокса. Большое количество и сложность моделей механики жидкости, газа и плазмы делают матричный метод привлекательным из-за отсутствия необходимости разрабатывать специализированные алгоритмы решения разностных уравнений, отсутствия расщепления и избыточности кода, получение чисто неявных схем и высокой скорости сходимости метода Ньютона. В работе приведены примеры использования матричного метода Ньютона–Крылова для вынужденных течений вязкой несжимаемой изотермической жидкости, течений вязкой слабосжимаемой неизотермической жидкости, течений вязкой несжимаемой неизотермической жидкости при наличии свободной поверхности. Показано, что формулировка уравнений для функции тока позволяет получить существенное ускорение (в несколько раз) по сравнению с формулировкой уравнений для естественных переменных (скорость-давление). Эффективность применения матричного метода определяется, в частности, качеством используемых предобуславливателей. Прогресс в области их совершенствования, или использование предобуславливателей класса приближенных

обратных, способно увеличить производительность метода. Продемонстрирована возможность использования матричных методов для расчета формы свободной границы. Результаты работы дают уверенность в создании матричных методов для расчета задач со свободной поверхностью без использования расщепления для расчета гидродинамики и расчета формы свободной поверхности. Целесообразно исследование возможностей метода для сжимаемых течений, в частности, с наличием ударных волн, и течений с фазовыми переходами.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 07-01-00133 (разработка пространственной модели движения химически реагирующего газа), а также в рамках Программы фундаментальных исследований РАН (создание моделей физико-химической кинетики высокотемпературных газовых потоков) и Программы министерства образования и науки Российской Федерации РНПВШ 2.1.1/4693 (создание гибридных радиационно-столкновительных моделей аэрофизики).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- Fr — число Фруда;
- g — ускорение свободного падения;
- Gr — число Грасгофа;
- h — форма области;
- J — матрица Якоби;
- n — вектор нормали;
- p — давление;
- Pr — число Прандтля;
- r — радиальная координата;
- R — радиус кривизны поверхности;
- Re — число Рейнольдса;
- T — температура;
- U — горизонтальная компонента скорости;
- V — вертикальная компонента скорости;
- \vec{V} — вектор скорости;
- \vec{S} — тензор скоростей деформаций;
- z — аксиальная (вертикальная) координата;
- Γ — граница области;
- θ — азимутальная координата;
- ρ — плотность;
- σ — поверхностное натяжение;
- τ — касательный вектор;
- Ψ — функция тока;
- ω — завихренность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть I. М.: Физматлит, 1963. 583 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
3. Суржиков С.Т. Оптические свойства газов и плазмы. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. 576 с.
4. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 616 с.
5. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.
6. Shyy W. Computational Modeling for Fluid Flow and Interfacial Transport. Elsevier, 1993. 504 с.
7. Лабунцов Д.А., Ягов В.В. Механика двухфазных систем. М.: изд-во МЭИ, 2000. 374 с.
8. П. Роуч. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

9. Пейре Э., Тейлор Т. Вычислительные методы в механике жидкости. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
10. Флетчер. Вычислительные методы в динамике жидкости. М.: Мир, 1991.
11. Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: "Мир", 1990.
12. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Springer, 1996. 356 с.
13. Hirsch Ch. Numerical Computation of Internal and External Flows. Elsevier, 2007. 680 с.
14. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
15. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Научный мир, 2002.
16. Петров А.Г. Метод расчета обтекания плоских и осесимметричных тел потоком вязкой жидкости // Актуальные проблемы механики: механика жидкости, газа и плазмы. М.: Наука, 2008. с. 170-179.
17. О.С.Мажорова, Ю.П.Попов. Матричный метод численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса. ДАН СССР, т.259, № 3, 1981.
18. Федюшкин А.И. Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «Марена». М.: ИПМ, 1990. 31 с.
19. Бабаев И.Ю., Башкин В.А., Егоров И.В. Численное решение уравнений Навье–Стокса с использованием итерационных методов вариационного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 11. С. 1693–1703.
20. Press W.H., Teulkovsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in Fortran. Cambridge.
21. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.
22. <http://www.cs.umn.edu/~saad/software/sparskit/sparskit.html>
23. <http://www.math.tu-berlin.de/ilupack>
24. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. JCP 193 (2004) 357-397.
25. Полежаев В.И., Бунэ А.В., Везуб Н.А. и др. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1987. 271 с.
26. Bruneau C., Saad M. The 2D lid-driven problem revised. Computers & Fluids 35 (2006) 326-348.
27. Грязнов В.Л., Ермаков М.К., Никитин С.А., Павловский Д.С. Решение задач конвекции на персональном компьютере. Препринт № 481, Ин-т проблем механики АН СССР, 1990. 20 с.
28. Ермаков М.К., Никитин С.А., Полежаев В.И. Система и компьютерная лаборатория для моделирования тепло- и массообмена конвективных процессов. Известия РАН, сер. Механика жидкости и газа, 1997, №3. <http://www.comga.ru>
29. M. Van Dyke. An Album of Fluid Motion. 1982.
30. Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge University Press, 1999. 378 с.
31. Франк А.М.. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 2001. 208 с.
32. Shevtsova V.M., Ermakov M.K., Legros J.C. Oscillations of a liquid bridge free surface due to the thermal convection. ZAMM Appl. Math. Mech., v. 79, S3, p.S727-S728.
33. Cuvelier C., Driessen J.M. Thermocapillary free boundaries in crystal growth. J. Fluid Mechanics, 196 (1986) 1-26.
34. Безуглый Б.А., Тарасов О.А. // Письма в ЖТФ. 2004. т.30. Вып.4 с.20-24
35. Суржиков С.Т. Радиационно-конвективный теплообмен в камере оптического плазмотрона // Теплофизика высоких температур 1990. т.28. №6. с.1205-1213.
36. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989.