

О ПОСТРОЕНИИ ЗАМКНУТОГО ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В.А. Бабенко¹, В.А. Фрост²¹Институт тепло и массопереноса им. А.Б. Лыкова, НАН, Беларусь²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1

Аннотация

Проведено сравнение различных способов аппроксимации двухточечных третьих моментов поля скорости, входящих в уравнение Кармана – Ховарта. Для этого используются известные экспериментальные результаты А. Таунсенда и Р. Стюарта и модельная форма энергетического спектра турбулентности, позволяющая аппроксимировать экспериментально определенные вторые моменты поля скорости. Последние используются для вычисления двухточечных третьих моментов по методикам различных авторов. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными, что позволяет получить количественные оценки точности аппроксимации. Для ряда моделей проведены расчеты структурной функции второго порядка по уравнению Колмогорова для инерционного интервала. При этом для моделей Хассельмана и Лыткина получена ожидаемая для инерционного интервала степенная зависимость $D_{LL}(r) \sim r^{2/3}$ для структурной функции D_{LL} .

ABOUT THE CLOSED DESCRIPTION OF TURBULENCE

V.A. Babenko¹, V.A. Frost²,¹ IHMT, NAS, Belarus, Minsk² IPMech RAS, Russia, Moscow, 119526

Comparison of different approximations for the two-point third moments of velocity field, appearing in the Karman – Howart equation has been carried out. For the purpose, known experimental results of Townsend and Stewart, and the model form of turbulence energy spectrum, which enables to approximate the experimentally determined second moments of velocity field, are used. The latter are applied for evaluation of the two-point third moments with procedures proposed by different authors. The calculation outcomes are compared to experimental data that allows obtaining the quantitative assessments of approximation accuracy. For a number of models the second order structural function is found from the Kolmogorov equation for inertial interval. Thus, in the K. Hasselman and Y. Lytkin models for the structural function D_{LL} the power law expected in the inertial interval $D_{LL}(r) \sim r^{2/3}$ is obtained.

1. ВВЕДЕНИЕ

Знакомство с возможностями использования коммерческих пакетов CFD, таких как, например, ANSYS-Fluent, для расчета турбулентных режимов течения показывает чрезвычайное многообразие методов расчета. Многочисленны также гипотезы, предложенные для замыкания различных систем уравнений, предложенных для описания турбулентных режимов течения. Эта ситуация очень далека от идеальной, когда по мере развития науки происходит проверка высказанных гипотез, в результате которой количество гипотез сокращается и, в пределе, остается одна или несколько, прошедших проверку на экспериментальном материале. Возникает вопрос – почему это не происходит в науке о турбулентности.

Данная статья посвящена анализу нескольких гипотез, использующихся для замыкания уравнения Кармана – Ховарта для корреляционной функции поля скорости $f(r)$ в однородной изотропной турбулентности.

$$\frac{\partial f(r)}{\partial t} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \left(k(r) + Dr^4 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) \right]$$

Это уравнение содержит двухточечный момент третьего порядка $k(r)$ который непосредственно не

выражается через искомую функцию, что делает это уравнение не замкнутым.

В данной работе рассматриваются подходы, основанные на предположениях о формах связи двухточечных моментов второго и третьего порядков. Предпочтение отдается тем из них, которые могут быть использованы в неоднородных условиях и при вычислениях не приводят к существенным осложнениям. Третьи моменты, входящие в уравнения для корреляционной функции, обычно интерпретируются как вихревая вязкость, для аппроксимации которой используется градиентная гипотеза:

$$k(r) = v_t \left[\frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] \quad (1)$$

Коэффициент v_t имеет размерность кинематического коэффициента вязкости. Для проверки различных подходов в данной работе используются эксперименты по вырождению турбулентности за решеткой [1]. В качестве количественной оценки соответствия того или иного подхода выбрано единичное отклонение δM , определяемое соотношением:

$$\delta M = \sqrt{\frac{\sum_i [k(r_i) - k^M(r_i)]^2}{N}}$$

Здесь N – количество точек r_i , в которых экспериментально определялась величина двухточечного третьего момента $k(r_i)$; $k^M(r_i)$ – выражение, определяемое конкретной моделью замыкания; i – порядковый номер измерения. Далее используются безразмерные переменные, в которых интенсивность турбулентности $\langle u'^2 \rangle = 1$ и микромасштаб Тэйлора $\lambda = 1$.

2. АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Для вычисления корреляционной функции задается энергетический спектр $E(k)$:

$$E(k) \approx \begin{cases} k^4 & 0 \leq k \leq k_m \\ k^{-p} & k_m \leq k \leq k_d \\ \exp\left[-(k/k_d)^2\right] & k \geq k_d \end{cases}$$

параметры которого (k_m, k_d, p) , а также амплитуда и масштаб абсциссы, определяются по минимуму отклонений вычисленной корреляционной функции

$$B_{LL}(r) = 2 \int_0^\infty \left[\frac{\sin(kr)}{(kr)} + 2 \frac{\cos(kr)}{(kr)^2} - 2 \frac{\sin(kr)}{(kr)^3} \right] E(k) dk$$

от экспериментально определенной при выполнении требований

$$\int_0^\infty E(k) dk = 1.5, \quad \int_0^\infty k^2 E(k) dk = 5, \quad (2)$$

соответствующим условиям $B_{LL}(0) = 1$ и $\lambda = 1$. Поиск экстремума производится по методу "оврагов", т.е. последовательным изменением параметров спектра.

На рис. 1 показан типичный вид спектра, полученного после нахождения локального экстремума.

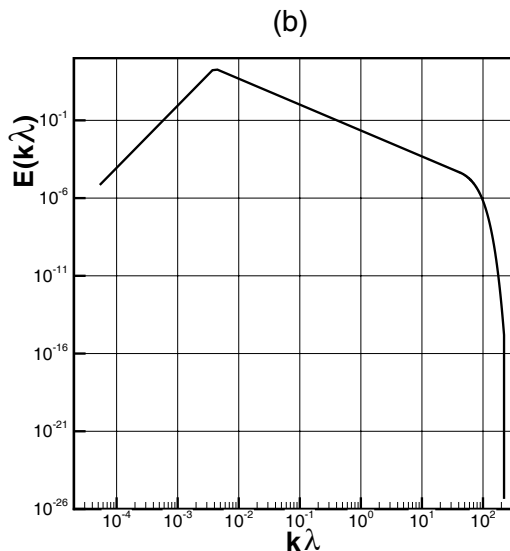


Рис. 1. Энергетический спектр турбулентности

Результаты подбора параметров спектров, соответствующих экспериментально полученным корреляционным функциям поля скорости на различных расстояниях от турбулизирующей решетки [1], приведены в табл. 1. Здесь x – расстояние от решетки вниз по по-

току; M – характерный размер ячейки сетки; λ – микромасштаб Тэйлора; δB – единичные отклонения аппроксимаций корреляционных функций, полученные при подборе параметров спектров. Отметим, что изменение параметров происходит синхронно с изменением расстояния от сетки. В нижних трех строках приведены переменные, рассчитанные по экспериментальным данным. Полученные единичные отклонения соизмеримы с точностью эксперимента.

Таблица 1

Параметры спектров, аппроксимирующих соответствующие корреляционные функции

x/M	20	30	60	90	120
k_m	0.025	0.21	0.23	0.225	0.15
k_d	180	25.5	26.50	26.0	5.00
p	0.71	1.51	1.51	1.505	1.67
$Re_\lambda = u'\lambda/\nu$	44.7	27.2	22.8	19.2	21.6
δB	.034	.028	.037	.033	0.034
u' см/с	16.9	11.9	27.55	5.97	5.09
λ см	0.25	0.30	0.43	0.52	0.61
Re_λ	28.0	24.2	21.7	21.0	20.7

Типичное соответствие экспериментальных и расчетных распределений для корреляционной функции представлено на рис 2. (а), на котором также представлена кривая $1-r^2/\lambda^2$ аппроксимирующая корреляционную функцию при малых r .

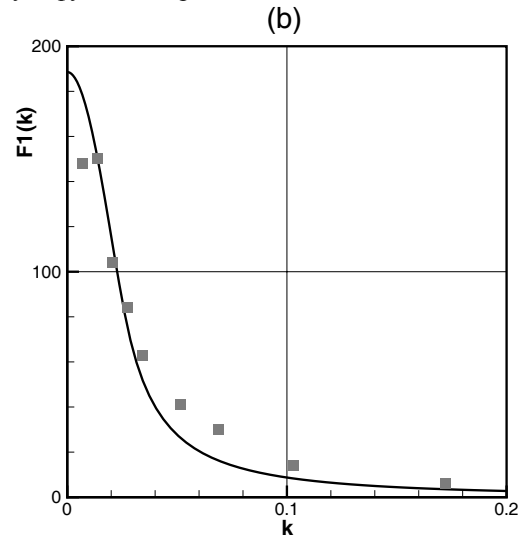


Рис. 2. Сравнение экспериментально определенных (точки) корреляционной функции (а) и одномерного спектра с результатами аппроксимации (кривые)

На рис. 2. (в) представлено сравнение экспериментально определенного одномерного спектра со спектром вычисленным по найденному энергетическому спектру.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕТЬИХ МОМЕНТОВ

В данном разделе продольные двухточечные третьи моменты

$$B_{LL,L}(r) = \langle u'_\parallel(x) u'_\parallel(x) u'_\parallel(x+r) \rangle = k(r) u'^3,$$

входящие в уравнение Кармана – Ховарта, вычисляются с использованием соотношений, предложенных различными авторами. Здесь индекс \parallel означает, что рассматриваются компоненты вектора скорости, направленные вдоль вектора r . При этих вычислениях основное внимание уделяется форме получаемых зависимостей. Множители, не зависящие от величины r , опускаются, а для согласования расчетов с экспериментальными результатами вводится коэффициент согласования k_s , величина которого определяется по методу наименьших квадратов с целью уменьшения среднеквадратичного отклонения результатов расчета от данных эксперимента. По величине полученного среднеквадратичного отклонения делается вывод о точности предлагаемого метода пересчета корреляций в третьи моменты.

Рассматриваются гипотезы К. Хассельманна [2], М.Д. Миллионщикова [3], Ю.М. Лыткина и Г.Г. Черныха [4], Н.И. Акатнова [5], гипотеза, предложенная С. Ченом и Р.Крейчнаном для описания скалярного поля [6], и результаты, полученные по методике EDQNM [7]. Для моделей [2] и [7] рассматриваются по два варианта способа вычислений третьих моментов.

Работа [2] является исторически первой, в которой делается попытка построить замкнутое описание уравнения Кармана – Ховарта. Рассматривая коэффициент v_t как фактор, приводящий к обмену энергией между вихрями различных размеров, и вводя некоторое характерное для этого процесса время τ , автор предполагает что $v_t = u'^2(1-f)\tau$. Это выражение полностью совпадает с используемым в моделях [3,8]. В [2] предполагается, что величина τ зависит от r или, в физической трактовке, от размера вихрей. Это предположение принципиально отличает подход [2] от подхода [3,8], где величина τ предполагается независимой от r . Используя для определения времени τ уравнение энергии вихрей, размер которых не превосходит величины r , автор предлагает следующее выражение для характерного времени:

$$\tau = \gamma \frac{u'^2(1-f)}{2\nu u'^2 \left(\frac{10}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r} f' \right) - u'^3 \left(k' + \frac{4k}{r} \right)},$$

содержащее коэффициент согласования γ . Для v_t отсюда следует

$$v_t = \frac{\gamma}{2} \frac{u'^2(1-f)^2}{\nu \left(\frac{10}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r} f' \right) - v_t \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right)}. \quad (3)$$

Вместо градиентного представления в [2] используется

$$\frac{d}{dr} (r^4 k(r)) = v_t \frac{d}{dr} (r^4 f'(r)), \quad (4)$$

что соответствует выносу коэффициента v_t в уравнении Кармана – Ховарта из-под знака дифференцирования. Решая уравнение (4) как дифференциальное уравнение для третьего момента $k(r)$, получаем (вариант 2):

$$k(r) = r^{-4} \left[\int_0^r v_t(r) (4f'(r) + r f''(r)) r^3 dr \right] \quad (5)$$

Для проверки отличия, связанного с использованием соотношения (5) вместо градиентной формы (1), используя, следуя [2], первое приближение для v_t , при котором пренебрегается v_t в знаменателе (3), применяется также градиентная форма (1) (вариант 1).

Модель [3] получена на основе градиентной гипотезы и предположения, что коэффициент v_t является произведением некоторой длины на характерную скорость, в качестве которых можно принять расстояние между точками r и пульсационную скорость u' . Предложенная зависимость для третьих моментов такова, что непосредственно влияет на энергию пульсаций. Этот дефект модели [3] устранен в работе [4], в которой при сохранении градиентной гипотезы характерная скорость отождествлялась с разностью скоростей в точках, в которых рассматривается корреляционная функция. Это привело к появлению в выражении для коэффициента v_t квадратного корня из структурной функции турбулентного поля скорости.

Н.И. Акатновым и Е.Н. Быстровой [3] и независимо позже В.П. Красицким и В.А. Фростом [8] была получена градиентная форма коэффициента v_t , для которого использовалось произведение интенсивности действия на некоторое характерное независимое от величины r время. Интенсивность действия отождествлялась со структурной функцией. Следует отметить, что в этой модели [5,8] v_t является тензором, что позволяет использовать этот подход при расчетах в случае возможной неізотропии турбулентности [9].

Исследования Р.Крейчнана, начатые в 50-х годах XX века с метода "прямого взаимодействия", и продолженные усилиями многих авторов, позволили получить очень простое выражение для коэффициента аналогичного v_t для скалярного поля [6]:

$$v_t = \frac{1}{2} \int_0^t \langle \delta_{\parallel} u(r,t) \delta_{\parallel} u(r,t') \rangle dt'. \quad (6)$$

Здесь подынтегральное выражение

$$\delta_{\parallel} u(r,t) = [(u(r,t) - u(0,t)) \cdot r] / r$$

представляет неодновременную структурную функцию поля скорости.

Соотношение (5) по физическому смыслу совпадает с используемым в [5,8], в котором вместо введения характерного времени производится интегрирование по времени. Основываясь на подобии действия турбулентного поля скорости на поле скаляра и на собственное поле скорости, можно использовать предложенное соотношение (5) для оценки рассматриваемых третьих моментов поля скорости. Пределы интегрирования по времени в соотношении (5) определяются тем, что поле в момент $t=0$ предполагается гауссовым. Ничто, однако, не мешает отодвинуть этот момент на минус бесконечность, а текущий момент принять за ноль. Обычно используемое экспоненциальное затухание по времени означает, что фактически область интегрирования, определяющая характерное

время, конечна. Располагая спектрами, можно вычислить величину ν_i , используя предположения о разновременных спектрах. Использование предложенной П. Саффманом [10] экспоненциальной зависимости спектра от квадрата времени (вариант1): $E(k) \approx \exp(-k^2 \langle u'^2 \rangle t^2)$ позволяет вычислить ν_i . Второй вариант ν_i для модели [6] получается, если предположить более медленную зависимость спектра от времени:

$$E(k) \approx \exp(-k^2 \nu t).$$

В [7] приведено выражение для ν_i в виде интегрального преобразования от энергетического спектра, содержащее некоторое характерное время $\theta_i(k)$:

$$\nu_i = 4 \int_0^\infty dk \left[\frac{1}{3} - \frac{\sin(kr)}{(kr)^3} + \frac{\cos(kr)}{(kr)^2} \right] E(k) \theta_i(k).$$

Характерное время $\theta_i(k)$ определяется соотношением [11]

$$\theta_i(k) = \frac{1 - \exp[-(\mu'' + \nu k^2)]}{\mu'' + \nu k^2},$$

где $\mu'' = \lambda'' \sqrt{\int_0^k p^2 E(p) dp}$ и λ – некоторые безразмерные параметры.

Основные соотношения, используемые при расчете, приведены в табл. 2, где $f = B_{LL}(r)/B_{LL}(0)$ – безразмерная продольная корреляционная функция; f_0'' – вторая производная корреляционной функции в нуле; $D(t, t')$ – разновременная структурная функция поля скорости; Q и $s(kr)$ – известные ядра спектральных преобразований. Как видно из приведенной таблицы, только модель пункта 3 не является градиентной.

Таблица 2

Расчетные зависимости для третьих моментов

1	[3]	$r f'$
2	[2], вариант 1	$\nu_i f'; \nu_i = \frac{(1-f)^2}{5f_0'' + f'' + 4f'/r}$
3	[2], вариант 2	$\int \nu_i \cdot (f'' + 4f'/r) dr$
4	[4]	$r \sqrt{1-f} f'$
5	[6], вариант 1	$\nu_i = \int D(t, t') dt'$ $D \approx \int QE(k)/k dk$
6	[6], вариант 2	$\nu_i = \int D(t, t') dt'$ $D \approx \int QE(k)/k^2 dk$
7	[5]	$(1-f)f'$
8	[7]	$\nu_i = 4 \int_0^r E(k) \theta_i(k) s(kr) dk$ $\theta_i(k) = 1 / \left(\sqrt{\int_0^k k^2 E(k) dk} + \nu k^2 \right)$

Здесь f – корреляционная функция; f_0'' – ее вторая производная в нуле; ν_i – коэффициент в градиентном соотношении (1); $D(t, t')$ – неодновременная структурная функция поля скорости; Q и $s(kr)$ – известные ядра спектрального преобразования.

3.1. Коэффициенты согласования

Результаты расчетов третьих моментов по соотношениям, приведенным в табл. 2, используются для определения по методу наименьших квадратов масштабного фактора коэффициента k_s , обеспечивающего наилучшее совпадение экспериментальных и рассчитанных значений третьих моментов. В табл. 3 приведены единичные отклонения рассчитанных и экспериментальных значений третьих моментов для различных моделей и расстояний от решетки. Жирным шрифтом выделены наилучшие результаты.

Таблица 3

Единичные отклонения, полученные при аппроксимации третьих моментов

x/M	20	30	60	90	120	
1	.0078	.0071	.0077	.0095	.0085	.0081
2	.0083	.0032	.0040	.0055	0.0063	.0055
3	.0087	.0035	.0042	.0054	.0069	.0057
4	.011	.0060	.0058	.0071	.0091	.0078
5	.010	.0044	.0042	.0057	.00693	.0062
6	.016	.011	.011	.012	.014	.011
7	.0083	.014	.014	.015	.013	.013
8	.021	.0059	.0057	.0069	.0093	.0097

В табл. 4 для различных моделей и расстояний от решетки приведены значения k_s . В последнем столбце приведены средние значения этого коэффициента для различных моделей, вычисленные по всем расстояниям от решетки.

Приведенные в табл. 3 единичные отклонения позволяют оценить рассмотренные модели. Оба варианта модели [2] обеспечивают наилучшее согласование с экспериментом, а также строго монотонное изменение коэффициентов согласования (см. Табл. 4). Некоторые модели приводят к практически постоянным коэффициентам согласования. Так коэффициент для модели [4] является удвоенным коэффициентом, использованным в [4,12]. Монотонное изменение k_s получено также для модели [5]. Для остальных моделей характерных трендов k_s выявить не удастся.

Таблица 4

Коэффициенты согласования k_s , позволяющие достичь наименьшего отклонения от экспериментальных данных

	20	30	60	90	120	средние
1	.1092	.1230	.1327	.124	.126	.123 ± .008
2	12.95	11.05	10.26	9.16	8.07	10.3 ± 1.7
3	1.102	.935	.875	.781	.696	0.88 ± 0.14
4	.1306	.1515	.164	.160	.151	0.151 ± 0.012
5	.2074	.2422	.262	.257	.231	0.24 ± 0.02
6	.0463	.0729	.0917	.097	.096	0.081 ± 0.02
7	.8072	.6288	.5826	.471	.502	0.598 ± 0.12
8	2.345	4.412	4.047	4.13	4.42	3.94 ± 0.8

Для модели [7] (строка 8) приведены значения параметра, используемого в определении характерного времени.

На рис. 3 для $x/M = 120$ приведено сравнение экспериментальных измерений (точки) и скорректированных при помощи подобранных значений k_s рассчитанных зависимостей третьих моментов. Видно, что очень трудно произвести выбор лучшей модели.

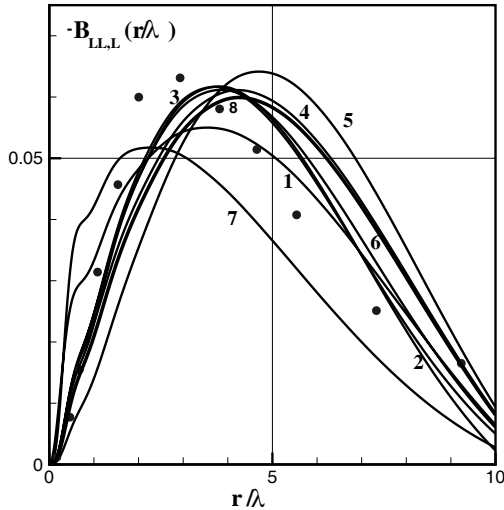


Рис. 3. Аппроксимация третьих моментов при помощи различных моделей. Цифры соответствуют табл. 3

3.2. Устранение тренда

Для моделей с ясно выраженными трендами коэффициента k_s [2] можно получить зависимости этих коэффициентов от числа Рейнольдса. Для первого варианта этой модели третий момент, учитывая зависимость ν_t от коэффициента вязкости (3), выделив и учтя зависимость от числа Рейнольдса, можно представить в виде

$$B_{LL,L}^{(H)} = u'^3 k_s^{(H)} Re_\lambda \frac{\overline{D_{LL}^2(\eta)}}{5\overline{B_{LL}''(0)} + \overline{B_{LL}''(\eta)} + 4\overline{B_{LL}'(\eta)}/\eta} \overline{B_{LL}'(\eta)}$$

$$k_s^{(H)} = 0.111 \pm 0.007.$$

Здесь черта сверху обозначает безразмерные величины; $\eta = r/\lambda$, все производные вычисляются по η . Коэффициент $k_s^{(H)}$ пересчитывается из коэффициентов согласования, приведенных в табл. 4, с использованием экспериментальных значений числа Рейнольдса. Учет зависимости от числа Рейнольдса приводит к более чем двухкратному уменьшению разброса среднего значения.

Для модели [5] в размерных переменных имеем

$$B_{LL,L}^{(A)} = k_s^{(A)} \frac{\lambda}{u'} D_{LL}(r) B_{LL}'(r); k_s^{(A)} = \frac{k_s^{(7)}}{2} = 0.30 \pm 0.06.$$

Здесь комплекс $k_s^{(A)}(\lambda/u')$ можно трактовать как характерное время τ_u , которое, используя выкладки метода моментов [8], можно связать со скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности

$\tau_u = (15\nu|f_0''|)^{-1}$ где $|f_0''|$ – модуль второй производной по r , вычисляемой при $r = 0$.

Физический смысл этого соотношения заключается в учете торможения жидкой частицы под действием вязкости. Если рассматривать также торможение под действием сил давления (невязкое торможение), то в выражение для τ_u необходимо ввести характерное время крупномасштабного движения L/u' , включив в него некоторый заранее неизвестным коэффициент C_N . В результате характерное время может быть записано в форме

$$\tau_u = \left[3 \left(5\nu |\overline{R_{u,rr}}(0,t)| + C_N \frac{u'}{L} \right) \right]^{-1}.$$

Здесь L – интегральный масштаб турбулентности. Если в итоговое выражение для третьих моментов включить структурную функцию, то в безразмерном виде

$$\overline{\nu_t} = \frac{2(1-f)}{3 \left(5f''|_{r=0}/Re_\lambda + C_N \frac{\lambda}{L} \right)}. \quad (7)$$

Аналогичные соображения к проблеме замыкания применялись во многих подходах. Величина C_N связана с коэффициентом турбулентной вязкости и может быть определена из кинематических соображений. Если считать, что вихрь за время своего существования поворачивается на четверть оборота, то по соображениям, высказанным в [13,14] $C_N = 0.53$. В [2] для аналогичной величины приведены значения $0.25 \div 0.37$, а из аппроксимации коэффициента турбулентной диффузии можно получить значение $C_N = 0.2$.

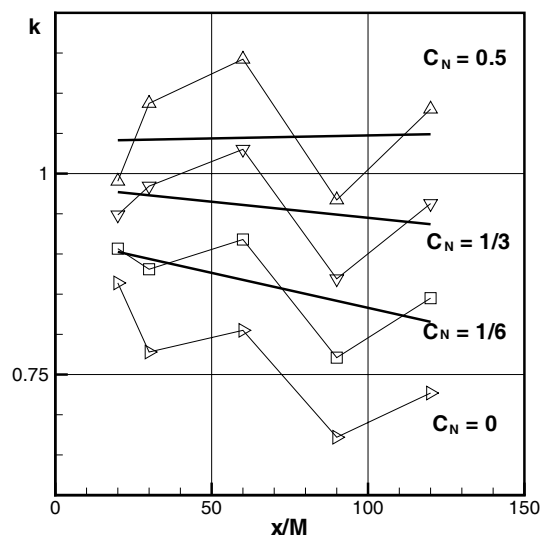


Рис. 4. Распределения коэффициентов согласования при различных значениях параметра C_N

На рис. 4 приведены результаты подбора величины C_N в процессе устранения тренда. Отношение L/λ в (6) вычислялось по спектру, используемому при вычислении корреляционной функции. Прямые линии проведены по методу наименьших квадратов с целью

более четкого выделения наблюдаемого тренда. С увеличением C_N тренд аппроксимации заметно уменьшается, и значение $C_N=0.5$ может считаться оптимальным. Отсутствие тренда позволяет предположить, что влияние числа Рейнольдса учтено и соотношение (6) при значении $C_N=0.5$ является универсальным, по крайней мере, до обнаружения расхождений с экспериментальными результатами.

4. УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ИНЕРЦИОННОГО ИНТЕРВАЛА

При выполнении второй гипотезы Колмогорова, заключающееся в предположении о стационарности турбулентности в некотором диапазоне масштабов при очень больших числах Рейнольдса, пренебрежение зависимостью моментов, входящих в уравнение Кармана–Ховарта, от времени позволяет проинтегрировать это уравнение и получить соотношение, связывающее структурные функции различных порядков, называемое уравнением Колмогорова:

$$D_{LL,L}(r) - 6\nu \frac{dD_{LL}(r)}{dr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r. \quad (8)$$

Здесь $D_{LL}(r)$, $D_{LL,L}(r)$ – соответственно двухточечные структурные функции второго и третьего порядка поля скорости; ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности; ν – коэффициент кинематической вязкости. Далее используются безразмерные переменные, построенные с использованием характерной скорости $v_u=(\nu\varepsilon)^{1/4}$ и масштаба длины $\eta_u=(\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$.

Для градиентной формы аппроксимации интегрирование уравнения для моделей [4] и [5]

$$\left(1 + K_{L|A} D_{LL}\right) \frac{dD_{LL}(r)}{dr} = \frac{2}{15} r$$

при начальных условиях $r=0; D_{LL}(0)=0$ особых затруднений не вызывает. Для модели [5] существует точное решение, удовлетворяющее начальному условию $D_{LL}(0)=0$:

$$D_{LL}(r) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2}{15} K_A r^2}}{K_A}.$$

Связь вторых и третьих моментов в модели [2] описывается соотношением неградиентного типа (4), которое в терминах структурных функций будет

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \frac{d}{dr} (D_{LL,L})(r) + 2/3 \frac{(D_{LL,L})(r)}{r} = \\ & = 2K_H(r) \left(-1/2 \frac{d^2}{dr^2} D_{LL}(r) - 2 \frac{d}{dr} \frac{D_{LL}(r)}{r} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Система, состоящая из уравнения Колмогорова (8), соотношений модели [2] для коэффициента ν_t и соотношения (9), разрешается относительно второй производной для трех вариантов: i) градиентное приближе-

ние, ii) первое приближение в соотношении (3) и iii) без приближений.

При расчетах во всех случаях за исключением модели [5] значения k_ζ подбирались из условия наилучшего соответствия результатам расчета по модели [5], для которой использовалось рекомендуемое авторами [4, 12] значение $K_L = 0.076$. На рис. 5 приведены зависимости структурных функций для моделей [4], [5] и [2]. Наблюдается почти полное совпадение результатов для модели [4] и всех вариантов модели [2]. Отличие заметно только в области $r \sim 10 \div 30$. При больших r изменение структурных функций для моделей [2] и [4] соответствует закону 2/3.

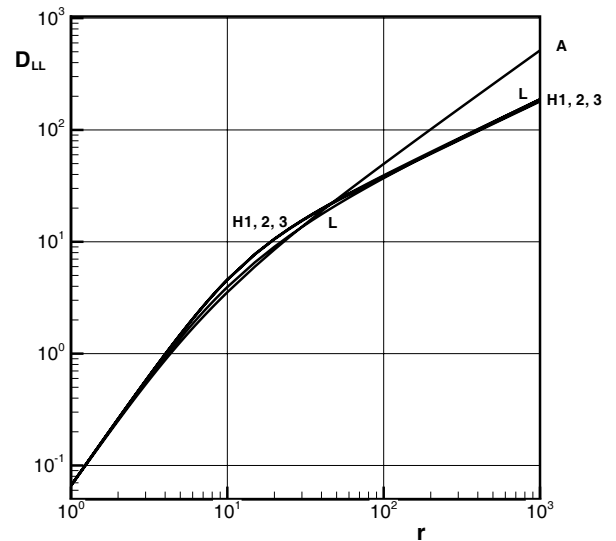


Рис. 5. Структурные функции D_{LL} , рассчитанные по уравнению Колмогорова для моделей [4], [5] и [2]. Для модели [2] рассматривается три варианта

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты не позволили на основании оценок точности аппроксимации экспериментально измеренных третьих моментов сделать выбор в пользу какой-либо модели. Если за критерий выбора принять удобства проведения вычислений, то оба варианта модели [6] не пригодны для использования, так как для вычисления третьих моментов необходимо либо вести расчет в терминах спектров, либо на каждом расчетном шаге вычисленная корреляционная функция должна пересчитываться в спектр. Это приводит к чрезмерному усложнению расчетов.

Модели [4,7,8] является наиболее пригодными для описания неізотропных потоков, так как в этих моделях коэффициент ν_t является тензором. Для выбора между моделями [4,7,8] необходимы дополнительные исследования.

Работа поддержана РФФИ проект 10-90040 Бел_а. Авторы благодарят профессора Г.Г.Черных за помощь в работе.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $B_{LL}(r)$ – двухточечный момент поля скорости второго порядка
- $B_{LL,L}(r)$ – двухточечный момент поля скорости третьего порядка

C_N – коэффициент в характерном времени крупномасштабного движения
 $D(t, t')$ – разновременная структурная функция поля скорости
 D_{LL} – структурная функция поля скорости второго порядка
 $E(k)$ – энергетический спектр турбулентности
 $f(r)$ – корреляционная функция поля скорости
 f_0'' – вторая производная корреляционной функции в нуле
 $k(r)$ – двухточечный момент третьего порядка
 $k^M(r_i)$ – выражение для третьего момента, определяемое конкретной моделью замыкания
 k_m, k_d, p – параметры энергетического спектра турбулентности
 $k_s^{(A)}(\lambda/u')$ – характерное время в модели
 L/u' – характерное время крупномасштабного движения
 M – характерный размер ячейки сетки
 Q и $s(kr)$ – ядра спектральных преобразований (табл. 2)
 $Re_\lambda = u'\lambda/\nu$ – число Рейнольдса
 $\langle u'^2 \rangle$ – интенсивность турбулентности
 x – расстояние от решетки вниз по потоку
 δB – единичные отклонения аппроксимаций корреляционных функций
 δM – единичное отклонение
 μ'', λ'' – параметры модели [7]
 ν_i – коэффициент, связывающий третьи моменты со вторыми, имеет размерность кинематического коэффициента вязкости
 λ – микромасштаб Тэйлора; безразмерный параметр в модели [7]
 τ – характерное время в разных моделях
 $\theta_i(k)$ – характерное время в модели [7]
 $\eta = r/\lambda$
 ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности

Индексы:

i – порядковый номер орта системы координат, порядковый номер измерения
 k – номер экспериментальной точки
 H, L, A – принадлежность модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stewart R.W., Townsend A.A. Similarity and self-preservation in isotropic turbulence//Phil. Trans. of the Royal Soc.A 1951, no. 867, v. 243, pp.359-386.
2. Hasselmann K. Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz. Deutsche Hydrographische Zeitschrift. 1958. Band 11, Heft 5, 207–217.
3. Миллионщиков М. Изотропная турбулентность в поле турбулентной вязкости. Письма в ЖЭТФ, 1969, т.10, с.406–31.
4. Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Об одном способе замыкания уравнения Кармана–Ховарта. Динамика сплошной среды, 1976, вып. 27, 124–130.
5. Акатнов Н.И., Быстрова Е.Н. Расчеты некоторых характеристик однородной турбулентности на основе уравнения Кармана–Ховарта, замкнутого посредством полуэмпирической модели // Теплофизика высоких температур, 1999, т. 37, N 6, 895–903.
6. Chen S., Kraichnan R. Simulations of a randomly advected passive scalar field Phys. Fluids 1998, Vol. 10, No 11 2867–2884
7. Eswaran V., O'Brien E.E. Simulations of scalar mixing in grid turbulence using an eddy-damped closure model//Phys. Fluids, 1989, A 1 (3), pp. 537–548.
8. Красицкий В.П., Фрост В.А. Молекулярный перенос в турбулентных потоках// Изв. РАН, Механика жидкости и газа. 2007. №2, 46–58
9. Акатнов Н.И., Быстрова Е.Н. Использование модели осесимметричной турбулентности для расчета статистических характеристик пульсационного движения в потоке с однородной неизменной скоростью сдвига осредненного движения//Теплофизика высоких температур, 2000, т. 38, N 4 с 600–608.
10. Suffman P.G. An approximate calculation of the lagrangian auto-correlation coefficient for stationary homogeneous turbulence//Appl. Scient. Res.1963, A11, 245–255.
11. Eswaran V., O'Brien E.E. Simulations of scalar mixing in grid turbulence using an eddy-damped closure model//Phys. Fluids, 1989, A 1 (3), pp. 537–548.
12. Chernykh G.G., Baev M.K. Numerical simulation of a structure of fully developed turbulent flow in small-scale zone//Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2010, Vol.25, no. 4, pp.289–302.
13. Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. 344 с.
14. Амбарцумян Е.Н., Глушко Г.С., Крюков И.А. Определение коэффициента турбулентного переноса в плоском течении несжимаемой жидкости. Изв. АН, МЖГ №3. 1997. с. 83–92.