

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ С НАГРЕВОМ ИНТЕНСИВНЫМИ АТОМАРНЫМИ ПУЧКАМИ

А.Ю. Чирков

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
Москва, 105005, 2-ая Бауманская ул., 5

Аннотация

Рассматривается численная модель кинетики ионов в аксиально-симметричной магнитной ловушке с концевыми «пробками», заполненной «теплой» максвелловской плазмой и сильно немаксвелловскими «быстрыми» ионами. Стационарное состояние популяции «быстрых» частиц поддерживается за счет ионизации инжектируемых нейтральных атомов высоких энергий. Физическая модель основана на кинетическом уравнении с двумерным в пространстве скоростей столкновительным оператором Фоккера–Планка. Обсуждается нестационарная численная схема.

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE FOKKER–PLANCK EQUATION FOR THE MODELLING OF MODIFIED GAS DYNAMICAL REGIMES IN MAGNETIC TRAP WITH HIGH POWER NEUTRAL BEAM

Numerical model of ion kinetics is considered for the axially symmetrical magnetic trap with end plugs (mirrors). The trap contains “warm” Maxwellian plasma and strongly non-Maxwellian “fast” ions. Steady-state fast ion population supported by the ionization of high-energy neutral atoms injected into the plasma. Physical model is based on the kinetic equation with two-dimensional Fokker–Planck collision operator in the velocity phase space. Non-steady-state numerical scheme is discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию кинетики высокоэнергетичных (или, как чаще говорят, «быстрых») ионов в аксиально-симметричной открытой магнитной ловушке с концевыми «пробками», конфигурация которой показана на рис. 1.

Если такая ловушка заполнена «теплой» максвелловской плазмой, то в столкновительном режиме скорость истечения плазмы через «пробки» примерно равна скорости звука, то есть истечение носит газодинамический характер. Такая система получила название газодинамической ловушки (ГДЛ) [1]. При достаточно большой длине такой ловушки, заполненной

дейтерий-тритиевой (D–T) плазмой, мощность термоядерной реакции может превысить потери энергии, связанные с уходом плазмы через торцы. В экспериментах на установке ГДЛ в ИЯФ им. Г.И. Будкера помимо газодинамического режима истечения плазмы продемонстрирован режим амбиполярного удержания в схеме с компактным запирающим пробкотроном [2]. В амбиполярном режиме возможно подавление потерь более чем на порядок, что существенно снижает требования к размерам системы. Перспективным выглядит проект компактного нейтронного источника на основе ГДЛ [3].

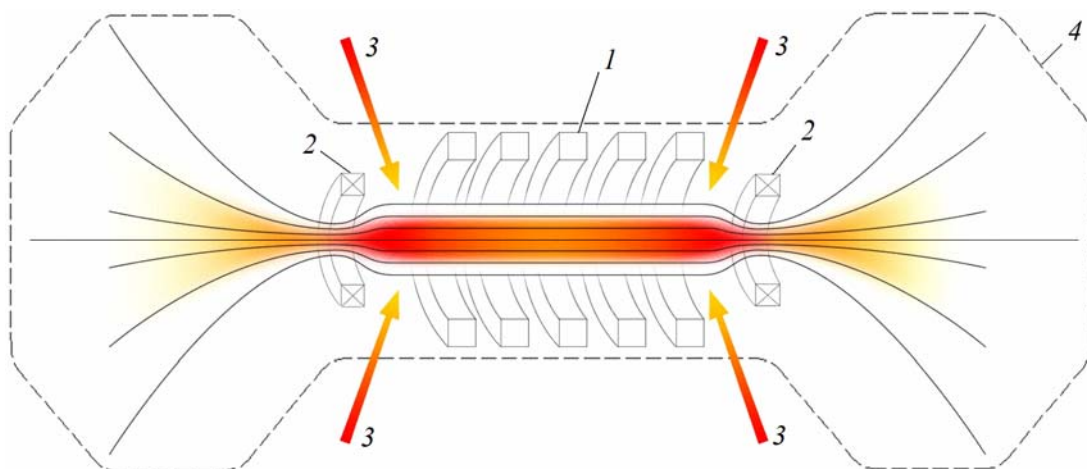


Рис. 1. Схема магнитного поля в длинной ловушке с магнитными пробками: 1 – катушки центрального соленоида, 2 – пробочные катушки, 3 – направления пучков высокоэнергетичных частиц, 4 – корпус вакуумной камеры

Инжекция быстрых нейтральных атомов (на рис. 1 нейтральные пучки схематично показаны стрелками) также способствует формированию положительного потенциального барьера на концах системы. Образующиеся в результате их ионизации быстрые ионы испытывают редкие столкновения по сравнению с «теплыми» ионами. Угловое рассеяние быстрых ионов гораздо менее интенсивно, чем рассеяние ионов «теплой» плазмы. Поэтому при наличии значительной популяции быстрых ионов закономерности истечения такой неравновесной плазмы из ловушки сильно отличаются от газодинамического режима.

Моделирование кинетики быстрых ионов применительно к условиям экспериментов на ГДЛ проводилось ранее в приближении отсутствия углового рассеяния и соответствующих потерь [4]. В настоящей работе рассматривается численное моделирование кинетики ионов на основе физической модели [5, 6], учитывающей угловое рассеяние быстрых частиц, а также их участие в термоядерных реакциях.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Физическая модель, положенная в основу настоящего исследования подробно описана в [6]. Здесь в сжатой форме рассмотрим постановку нестационарной пространственно нуль-мерной задачи с двумерным в пространстве скоростей кинетическим уравнением Фоккера–Планка [7].

В общем случае уравнение Фоккера–Планка является интегро-дифференциальным [8, 9]. Его решение требует значительных вычислительных ресурсов. В рамках приближений, принятых в [5, 6], столкновительный оператор Фоккера–Планка представляется в дифференциальной форме, что существенно снижает вычислительную трудоемкость задачи при сохранении физической адекватности описания процессов. В рассматриваемой задаче основную роль играют высокоэнергетичные («быстрые») ионы, для которых можно учитывать столкновения только с частицами термализованных популяций. При расчете таких столкновений термализованные популяции можно приближенно считать максвелловскими. «Быстрые» частицы после замедления также формируют термализованную популяцию, для учета которой организуется итерационный процесс по времени с небольшим числом итераций. В столкновительном операторе учитываются кулоновские столкновения. Для энергий, превышающих 1 МэВ, предусмотрен также учет упругих ядерных столкновений [10].

В координатах скорость v и угол θ между векторами скорости частицы и магнитной индукции уравнение Фоккера–Планка для функции распределения f_a частиц сорта a записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \left[D_{vv}^C \frac{\partial f_a}{\partial v} - (A_v^C + A_v^N) f_a \right] - \\ - \frac{1}{v^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta D_{\theta\theta}^C \frac{\partial f_a}{\partial \theta} = \\ = \frac{s_a(\theta)}{4\pi v_{0a}^2} \delta(v - v_{0a}) - L_a, \end{aligned} \quad (1)$$

где D_{vv}^C , $D_{\theta\theta}^C$, A_v^C – коэффициенты кулоновской диф-

фузии и кулоновского динамического трения [11]; A_v^N – коэффициент трения за счет упругого ядерного рассеяния; $s_a(\theta)$ – угловое распределение источника; L_a – оператор потерь частиц.

В стационарном случае $\partial f_a / \partial t = 0$, но для учета термализованной популяции рассматривается эволюция во времени решения нестационарного уравнения Фоккера–Планка.

Зависимость источника частиц от скорости принята в виде δ -функции, угловое распределение источника нормировано следующим образом:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi s_a(\theta) \sin \theta d\theta = q_a,$$

где q_a – число частиц, рождающихся в единице объема ловушки за единицу времени.

Потери частиц представлены поперечной и продольной по отношению к магнитному полю составляющими $L_{a\perp} = f_a / \tau_\perp(v, \theta)$ и $L_{a\parallel} = f_a / \tau_\parallel(v, \theta)$. Время поперечных потерь τ_\perp определяется турбулентным транспортом частиц поперек магнитного поля; в расчетах оно принято постоянным. Время продольных потерь τ_\parallel частиц, попавших в область потерь в пространстве скоростей, равно времени пролета вдоль ловушки; вне области потерь $L_{a\parallel} = 0$.

При функциях распределения фоновых частиц, близких к максвелловским, можно использовать коэффициенты диффузии и трения, соответствующие потенциалам Розенблюта–Трубникова для максвелловского фона [7, 11]

$$\begin{aligned} D_{vv}^C &= \frac{1}{2v} \sum_b \Gamma_{a/b} \left[\frac{\operatorname{erf}(u_b)}{u_b^2} - \frac{1}{u_b} \frac{\partial}{\partial u_b} \operatorname{erf}(u_b) \right], \\ D_{\theta\theta}^C &= \frac{1}{4v} \sum_b \Gamma_{a/b} \left[\left(2 - \frac{1}{u_b^2} \right) \operatorname{erf}(u_b) + \frac{1}{u_b} \frac{\partial}{\partial u_b} \operatorname{erf}(u_b) \right], \\ A_v^C &= -\frac{1}{v^2} \sum_b \Gamma_{a/b} \frac{m_a}{m_b} \left[\operatorname{erf}(u_b) - u_b \frac{\partial}{\partial u_b} \operatorname{erf}(u_b) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma_{a/b} = \left(\frac{Z_a Z_b e^2}{\varepsilon_0} \right)^2 \frac{n_b \Lambda_{a/b}}{4\pi m_a^2}$; e – элементарный заряд; m_a и Z_a – масса и заряд частиц рассматриваемого сорта a ; m_b , Z_b и n_b – масса, заряд и концентрация частиц сорта b ; $\Lambda_{a/b}$ – кулоновский логарифм для столкновений частиц a с частицами b ; ε_0 – электрическая постоянная; $\operatorname{erf}(u)$ – функция ошибок; $u_b = \sqrt{m_b v^2 / 2k_B T_b}$; T_b – температура частиц сорта b ; k_B – постоянная Больцмана.

Зная сечения упругого ядерного рассеяния, например, по экспериментальным данным [10], коэффициент динамического трения A_v^N можно представить в виде $A_v^N = -\frac{1}{2} v \sum_b n_b (\sigma v)_b (\delta E/E)_b$, где $(\sigma v)_b$ – произведение сечения рассеяния на скорость «быстрой» частицы; $(\delta E/E)_b$ – доля энергии, передаваемая при рассеянии частице сорта b . Полагая рассеяние изо-

тропным по углам, потери частиц, связанные с этим процессом, представим следующим образом:

$$L_a^N = (1 - \cos \theta_L) f_a \sum_b n_b (\sigma v)_b,$$

где θ_L – угловой размер области потерь при данной скорости.

При наличии симметричной области потерь на функцию распределения накладываются следующие граничные условия и условия симметрии:

$$\begin{aligned} f_a(v > v_{0a}, \theta) &= 0, \\ f_a(v, \theta) &\approx 0 \text{ в области потерь,} \\ \frac{\partial f_a}{\partial v}(v = 0, \theta) &= 0, \\ \frac{\partial f_a}{\partial \theta}(v, \theta = 0) &= 0, \\ \frac{\partial f_a}{\partial \theta}(v, \theta = \pi) &= 0. \end{aligned}$$

Область потерь в фазовом пространстве скоростей задана условием

$$\frac{m_a v_{\parallel}^2}{2} > \frac{m_a v_{\perp}^2}{2} \left(\frac{B_m}{B_0} - 1 \right) + Z_a e \Delta \varphi, \quad (2)$$

где $\Delta \varphi$ – электростатический барьер для частиц сорта a , равный соответствующей разности потенциалов между средней частью и торцами ловушки; B_0 – индукция магнитного поля в центральной части; B_m – индукция магнитного поля на торцах (в «пробках»).

Для расчетов средних значений величин, зависящих только от модуля скорости, вводится квазиизотропная функция распределения, которая представляет собой функцию распределения, усредненную по углу,

$$F_a(v) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f_a(v, \theta) \sin \theta d\theta \quad (3)$$

и характеризует плотность частиц в сферическом слое радиуса v пространства скоростей.

Для приближенных оценок и сравнения с численными результатами можно использовать простое аналитическое решение для функции распределения в диапазоне надтепловых энергий, полученное в [12],

$$f_{0a}(v) = \frac{q_a \tau_{sa}}{4\pi(v^3 + v_{ca}^3)}, \quad (4)$$

$$\text{где } \tau_{sa} = 6\pi \sqrt{2\pi} \frac{m_a}{\sqrt{m_e}} \frac{\varepsilon_0^2 (k_B T_e)^{3/2}}{\Lambda_{a/e} Z_a^2 e^4 n_e} \quad (5)$$

– время замедления за счет кулоновских столкновений; $v_{ca} = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Lambda_{a/i}}{\Lambda_{a/e}} \frac{m_e}{n_e} \sum_i \frac{Z_i^2 n_i}{m_i} \right)^{1/3} \left(\frac{2k_B T_e}{m_e} \right)^{1/2}$ – критическая скорость, при которой торможение на электронах равно торможению на ионах; $[z] = \sum_i \frac{Z_i^2 n_i m}{n_e m_i}$ (суммирование производится по всем сортам ионов i).

Выражение (4) соответствует ряду упрощений. Оно применимо в диапазоне скоростей $v_{Ti} < v < v_{Te}$, где v_{Ti} и v_{Te} – тепловые скорости максвелловских ионов и электронов. Какие-либо потери, в том числе потери, связанные с угловым рассеянием, при этом не учитываются. Это предполагает, что «быстрые» частицы полностью передают энергию максвелловским компонентам при замедлении до $v \sim v_{Ti}$.

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты расчета параметра скорости D–T-реакции с использованием высокоэнергетичной функции распределения (4) для двух случаев: 1) максвелловские ионы дейтерия, ионы трития – «быстрые»; 2) «быстрые» ионы дейтерия реагируют с максвелловским тритием.

Параметр скорости $\langle \sigma v \rangle$ характеризует скорость реакции при единичных концентрациях реагирующих компонентов; σ – сечение реакции, зависящее от относительной скорости сталкивающихся частиц; угловые скобки означают усреднения по функциям распределения реагирующих компонентов. В рассматриваемых случаях скорости частиц одного сорта намного больше скоростей частиц другого сорта, поэтому относительная скорость при расчете сечения может быть принята равной скорости «быстрой» частицы, следовательно, необходимо усреднение только по функции распределения «быстрых» частиц.

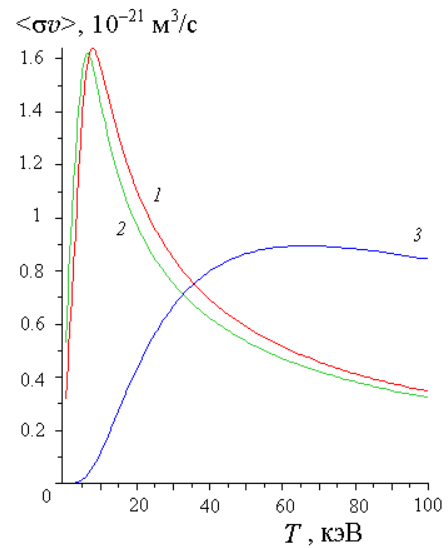


Рис. 2. Параметр скорости D–T-реакции: 1 – «быстрые» ионы трития, максвелловские ионы дейтерия; 2 – «быстрые» ионы дейтерия, максвелловские ионы трития; 3 – в максвелловской плазме

На рис. 2 также показана зависимость параметра скорости D–T-реакции в зависимости от температуры ионов для случая максвелловских компонент. Как для приближенных оценок, так и при численных расчетах температура электронов T_e была принята равной температуре максвелловских ионов T_i . Функция распределения быстрых ионов зависит от T_e в большей степени, чем от T_i , так как замедление происходит в основном на электронах. Следовательно, скорость реакции с участием быстрых ионов также зависит от T_e , в то время как в максвелловской плазме скорость реакции определяется величиной T_i . Поэтому использование одной температуры $T = T_i = T_e$ для максвеллов-

ских компонентов удобно при сравнении скорости реакции с участием «быстрых» ионов со скоростью реакции в максвелловской плазме. По оценкам, при теплообмене между максвелловскими ионами и электронами устанавливается небольшая разность температур, которая при $T_i \approx T_e = 10 \div 20$ кэВ составляет несколько килоэлектронвольт.

Отметим, что результаты, приведенные на рис. 2, качественно остаются справедливыми и в случае использования функций распределения, численно рассчитанных с учетом углового рассеяния.

В качестве критерия оптимизации рассматривалось отношение мощности P_{inj} , инжектируемой в плазму с высокоэнергетичными частицами, к выделяемой термоядерной мощности P_{fus} . Это отношение должно быть минимальным. В частности, для эффективного нейтронного источника P_{inj}/P_{fus} не должно сильно превышать единицу. Рассмотрение полного энергетического баланса не входило в данную задачу оптимизации, поэтому сформулированный критерий указывает оптимальные условия с точки зрения эффективного использования энергии инжектируемых частиц.

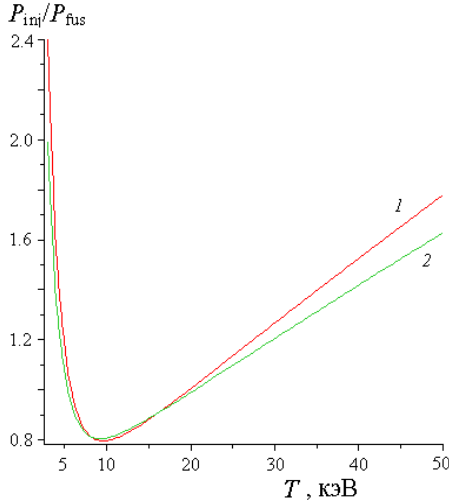


Рис. 3. Отношение мощности, вводимой в плазму с «быстрыми» частицами, к термоядерной мощности при оптимальной начальной энергии инжектируемых частиц 100 кэВ. 1, 2 – см. рис. 2

Значения отношения P_{inj}/P_{fus} , рассчитанные с использованием приближенной функции распределения (4), приведены на рис. 3. Приближенный анализ дает следующие оптимальные значения: температура плазмы $T \approx 10$ кэВ, начальная энергия инжектируемых частиц около 100 кэВ. Отметим, что эти результаты существенно отличаются от результатов, которые дает численное моделирование, что свидетельствует о значительном влиянии потерь, связанных с угловым рассеянием, и необходимости их корректного учета.

3. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА

Для численного решения уравнения Фоккера–Планка был использован метод на основе матричной прогонки. Рассмотрим разностную схему и алгоритм решения уравнения Фоккера–Планка (1) для нестационарного случая. Введем следующие безразмерные величины:

$$y = \frac{f_a}{f_0}, \quad z = \frac{v}{v_{0a}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau(v)}{t_0},$$

$$\tilde{a} = -\frac{v^2 (A_v^C + A_v^N)}{\Gamma_0}, \quad \tilde{b} = \frac{v^2 D_{vv}^C}{\Gamma_0 v_{0a}}, \quad \tilde{c} = \frac{v_{0a} D_{\theta\theta}^C}{\Gamma_0},$$

где масштабы величин определены следующим образом:

$$\Gamma_0 = \frac{n_0 Z_a^2 e^4}{4\pi\epsilon_0^2 m_a^2}, \quad f_0 = \frac{q_a}{4\pi a (v_{0a})}, \quad t_0 = \frac{v_{0a}^3}{\Gamma_0}.$$

Опуская волнистую черту над безразмерными величинами, запишем уравнение Фоккера–Планка в безразмерном виде:

$$z^2 \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ay + b \frac{\partial y}{\partial z} \right] + \frac{c}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} - z^2 \frac{y}{\tau}. \quad (6)$$

Здесь источник в виде δ -функции учитывается с помощью граничного условия

$$y(z=1, \theta) = s(\theta). \quad (7)$$

В области $0 \leq z \leq 1$ ($0 \leq v \leq v_{0a}$), $0 \leq \theta \leq \pi/2$ введем сетку с шагами по скорости h_1 , по углу h_2 и по времени h : $z_k = kh_1$, $k = 0, 1, 2, \dots, K$; $\theta_j = jh_2$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$; $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Запишем на этой сетке разностный аналог уравнения (5) для внутренних точек ($j = 1, 2, \dots, J-1$)

$$z_k^2 \frac{y_{k,j} - y_{k,j}}{h} = \frac{a_{k+1} y_{k+1,j} - a_k y_{k,j}}{h_1} +$$

$$+ \frac{b_{k+1} (y_{k+1,j} - y_{k,j}) - b_k (y_{k,j} - y_{k-1,j})}{h_1^2} +$$

$$+ c_k \frac{\sin \theta_{j+1} (y_{k,j+1} - y_{k,j}) - \sin \theta_j (y_{k,j} - y_{k,j-1})}{\sin \theta_j h_2^2} -$$

$$- z_k^2 \frac{y_{k,j}}{\tau_{k,j}}, \quad (8)$$

где $y_{k,j}$ и $y_{k,j}$ – значения сеточной функции в узле (k, j) на новом и старом временных слоях. Граничным условиям соответствуют разностные уравнения

$$\frac{y_{k,2} - y_{k,0}^*}{h_2} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{y_{k,J+1}^* - y_{k,J-1}}{h_2} = 0. \quad (10)$$

Здесь мы использовали центральные разностные производные, звездочкой обозначены фиктивные точки. Такой выбор обусловлен, во-первых, симметрией задачи, а, во-вторых, обеспечением устойчивости разностной схемы.

На границе области потерь (2) обычно требуют равенства нулю сеточной функции. При такой постановке неизбежно возникают трудности, связанные со сложной формой границы. Здесь мы не будем рассматривать разностную аппроксимацию этого условия. В окончательном варианте используется способ, обеспечивающий практическое равенство нулю искомого сеточной функции в области потерь, базирую-

щийся на физических соображениях. Как говорилось выше, в правую часть уравнения Фоккера–Планка вводится оператор $-f_a/\tau_{\parallel}$, действующий в области потерь. В этом случае в области потерь возникает некоторое крайне незначительное (но не нулевое) число пролетных частиц. Проведенное тестирование показало соответствие решений для указанных двух вариантов. При этом разностная схема второго варианта дает существенное упрощение вычислительной процедуры и обладает лучшей устойчивостью.

Введем обозначения

$$A_j^k = \frac{b_k}{h_1^2}, \quad j=1,2,\dots,J-1;$$

$$B_j^k = \frac{a_k}{h_1} + \frac{b_{k+1}}{h_1^2}, \quad j=1,2,\dots,J-1;$$

$$C_{j,j}^k = \frac{a_k}{h_1} + \frac{b_k + b_{k+1}}{h_1^2} + \frac{c_k}{h_2^2} \left(\frac{\sin \theta_{j+1}}{\sin \theta_j} + 1 \right) + \frac{z_k^2}{\tau_{k,j}} + \frac{z_k^2}{h}, \quad j=1,2,\dots,J-1;$$

$$C_{1,2}^k = -\frac{c_k}{h_2^2} \left(\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} + 1 \right);$$

$$C_{j,j-1}^k = -\frac{c_k}{h_2^2}, \quad j=2,3,\dots,J-1;$$

$$C_{j,j+1}^k = -\frac{c_k}{h_2^2} \frac{\sin \theta_{j+1}}{\sin \theta_j}, \quad j=1,2,\dots,J-2;$$

$$C_{J-1,J-2}^k = -\frac{c_k}{h_2^2} \left(\frac{\sin \theta_J}{\sin \theta_{J-1}} + 1 \right);$$

$$D_j^k = z_k^2 \frac{y_{k,j}}{h}, \quad j=1,2,\dots,J-1.$$

Величины $C_{1,2}^k$ и $C_{J-1,J-2}^k$ введены так, чтобы избавиться от фиктивных точек. На каждом шаге по скорости ($k=0,1,2,\dots,K$) введем векторы-столбцы

$$Y_k = [y_{k,j}]_{j=1,2,\dots,J-1}, \quad \mathbf{D}_k = [D_{k,j}]_{j=1,2,\dots,J-1},$$

диагональные матрицы

$$\mathbf{A}_k = (A_{k,j})_{(J-1) \times (J-1)}, \quad \mathbf{B}_k = (B_{k,j})_{(J-1) \times (J-1)}$$

и трехдиагональную матрицу

$$\mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & & & & \\ \dots & C_{j,j-1}^k & C_{j,j}^k & C_{j,j+1}^k & \dots \\ \dots & \dots\dots\dots & & & \dots \end{pmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}.$$

Уравнения (7)–(9) и граничные условия при $v=0$ и $v=v_{0a}$ можно представить в виде следующей системы матричных уравнений:

$$\mathbf{A}_k Y_{k-1} - \mathbf{C}_k Y_k + \mathbf{B}_k Y_{k+1} = -\mathbf{D}_k, \quad k=1,2,\dots,K-1; \quad (11)$$

$$Y_1 = Y_0; \quad (12)$$

$$Y_K = [s_a(\theta_j)]_{j=1,2,\dots,J-1}. \quad (13)$$

Выражение (12) отражает равенство нулю производной по скорости. Выражение (13) учитывает источник частиц.

Алгоритм решения системы (11)–(13) следующий:

$$Y_k = \alpha_{k+1} Y_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k=K-1, K-2, \dots, 2, 1, 0,$$

где α_k – квадратные матрицы размера $(J-1) \times (J-1)$, β_k – векторы-столбцы высотой $(J-1)$, связанные рекуррентными соотношениями

$$\alpha_{k+1} = (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_k)^{-1} \mathbf{B}_k, \quad k=1,2,\dots,K-1;$$

$$\beta_{k+1} = (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_k)^{-1} (\mathbf{A}_k \beta_k + \mathbf{D}_k), \quad k=1,2,\dots,K-1.$$

Из (12) следует, что α_1 – единичная матрица, а β_1 – нулевой вектор.

При нулевой начальной функции распределения для получения стационарного решения по методу установления требуется 2–3 итерации по времени. Если не требуется уточнение концентрации накапливающейся термализованной популяции, то практически достаточно одного шага. В расчетах типичные размеры сетки $K=200$, $J=51$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для моделирования кинетики плазмы в режимах с инжекцией высокоэнергетичных частиц был разработан код FPC2 (Fokker–Planck Code for 2D velocity space), основной модуль которого предназначен для численного решения уравнения Фоккера–Планка. В основу кода положены изложенные выше физическая модель и численный метод.

При моделировании установления стационарного распределения начало отсчета времени совпадает с моментом включения инжекции. В начальный момент функция распределения частиц рассматриваемого сорта равна нулю или, например, максвелловской функции, если частицы данного сорта имеются в стартовой плазме. Мощность инжекции принимается постоянной на протяжении всего времени расчета. При этом параметры плазмы изменяются. В качестве характерного времени установления стационарной функции распределения можно принять время кулоновского замедления (5), рассчитываемое по параметрам плазмы в стационарном режиме, которое обозначено $\tau_{s\infty}$.

Для расчетов мы ориентировались на следующие значения магнитного поля в ловушке: магнитная индукция в центральном соленоиде $B_0=1.5 \div 2$ Тл, в «пробках» – до 20 Тл. Отношение давления плазмы к магнитному давлению было задано $\beta=0.5$ в соответствии с достигнутыми в экспериментах значениями.

Разность потенциалов между областью максимальной магнитного поля и плазмой в центральной части соленоида принималась такой, что $e\Delta\varphi \approx (0.3 \div 1) k_B T$. Такие значения характерны для промежуточного режима между газодинамическим истечением «теплой» плазмы и ее амбиполярным удержанием. В первом приближении они соответствуют возможностям формирования потенциальных барьеров при инжекции.

Пример функции распределения в координатах скорость v и угол θ , полученной в результате численного решения, приведен на рис. 4. Как можно ви-

деть, при $e\Delta\varphi \sim k_B T$ формируется заметная стационарная популяция «быстрых» частиц, которые после замедления образуют стационарную максвелловскую популяцию. При дальнейшем повышении потенциального барьера максвелловская популяция начинает доминировать, но при этом эффективность передачи энергии инжектируемых частиц плазме практически не увеличивается.

Стационарное распределение практически устанавливается, когда время, отсчитываемое от начала инжекции, достигает величины $t \approx 3\tau_{s\infty}$.

Как показали расчеты, приближенное решение (4) в области высокой энергии в рассматриваемых условиях удовлетворительно соответствует квазиизотропной функции распределения (3), полученной с использованием численных решений.

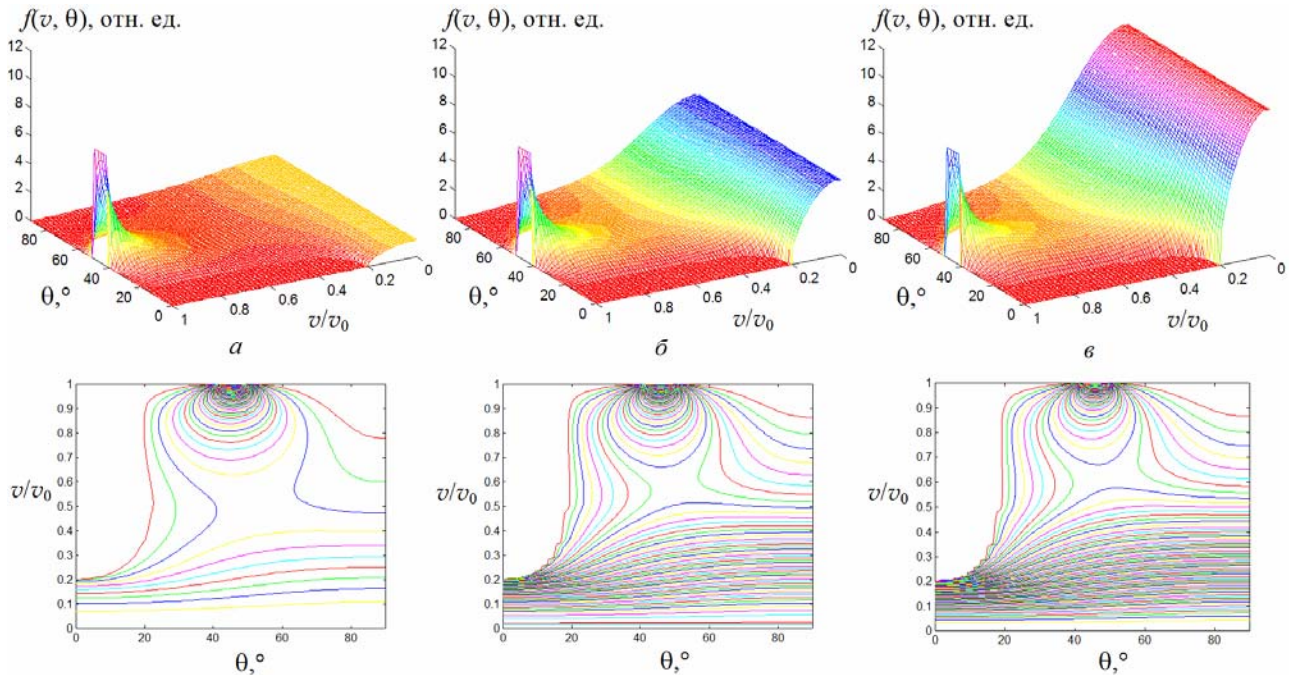


Рис. 4. Функция распределения ионов трития (вверху) и ее линии уровня (внизу) в моменты времени после начала инжекции $t = 0.1 \tau_{s\infty}$ (а), $0.3 \tau_{s\infty}$ (б) и $10 \tau_{s\infty}$ (в). Плотность дейтерия $n_D = 3.3 \times 10^{19} \text{ м}^{-3}$, энергия инжектируемых частиц 250 кэВ, угол инжекции $45^\circ \pm 5^\circ$, мощность инжекции 2 МВт/м³, $T_i = T_e = 20$ кэВ, $\Delta\varphi = 10$ кВ, характерное время замедления $\tau_{s\infty} = 4.5$ с, характерное время поперечных потерь $\tau_{\perp} = \tau_{s\infty}$

Результаты расчета эффективности инжекции, основанные на численном моделировании, заметно отличаются от приближенных аналитических оценок, представленных в конце второго раздела. Согласно численным результатам, оптимальное значение температуры повышается примерно до 20 кэВ, а соответствующее оптимальное значение энергии инжектируемых нейтральных частиц составляет примерно 250 кэВ.

Отметим, что рассмотренный оптимальный режим соответствует максимальной эффективности использования энергии инжектируемых частиц. Для расчета параметров плазмы, соответствующих максимальной энергетической эффективности в целом, необходим анализ полного энергобаланса с учетом кинетики всех компонентов плазмы. Ниже приведем результаты анализа упрощенного баланса энергии.

Такой баланс подразумевает, что источниками энергии являются инжектируемые быстрые частицы (в рассматриваемом случае – ионы трития) и альфа-частицы, рождающиеся в D–T-реакции. Потери энергии инжектируемых частиц при угловом рассеянии, согласно расчетам, могут составлять до половины всей инжектируемой мощности. Потери энергии альфа-частиц составляют 20 ÷ 30 % их начальной кинетической энергии. Потери энергии электронов и максвел-

ловских ионов в простейшем случае характеризуются энергетическим временем τ_E , которое пропорционально времени τ_p удержания частиц в ловушке. Было задано $\tau_E = \tau_p / 4.5$, что соответствует экспериментам на газодинамической ловушке. Величина τ_p вычислялась с учетом амбиполярного потенциала $\Delta\varphi$ [13]. В расчетах время τ_{\perp} , характеризующее турбулентный транспорт частиц поперек магнитного поля и соответствующие поперечные потери, было принято равным $\tau_{s\infty}$. Учитывались также потери, связанные с излучением электронов, но при $T_e = 10 \div 20$ кэВ они незначительны [5]. Согласно упрощенному балансу энергии, необходимая величина амбиполярного потенциала соответствует соотношению $e\Delta\varphi = k_B T$. Все прочие параметры практически такие же, как в примере на рис. 4. При этом $\tau_{\perp} = 4.5$ с, $\tau_E = 0.15$ с, $\tau_p = 0.7$ с, следовательно, продольные потери доминируют над поперечными, что является типичной ситуацией для открытых магнитных ловушек.

При мощности инжекции 2 МВт/м³ в указанном режиме термоядерная мощность составляет 1.85 МВт/м³, мощность в нейтронах – 1.5 МВт/м³. Если радиус плазмы равен 1 м, а ее длина 10 м, то полная мощность в нейтронах составляет 45 МВт, а поток энергии нейтронов на стенку вакуумной камеры – 0.7 МВт/м².

Плотность теплового потока при этом составляет примерно 1.6 МВт/м^2 . Такой режим является приемлемым для достижения необходимой эффективности источника высокоэнергетических нейтронов на основе рассматриваемой системы.

Необходимо подчеркнуть, что в данной работе мы рассматривали режимы со сравнительно невысоким амбиполярным потенциалом ($e\Delta\varphi \leq k_B T$), для которых характерно наличие значительной высокоэнергетичной популяции инжектируемых частиц. Амбиполярный потенциал поддерживается за счет повышенной концентрации «быстрых» частиц в окрестностях их точек отражения в областях «пробок». Еще один важный эффект «быстрой» популяции заключается в увеличении скорости реакции по сравнению с максвелловской плазмой. Так, в рассмотренном режиме при $e\Delta\varphi = 0.5k_B T$ скорость реакции в два раза выше скорости в максвелловской плазме, при $e\Delta\varphi = k_B T$ – в 1.5 раза выше, при $e\Delta\varphi = 2k_B T$ отличие на уровне 10 %.

В заключение отметим, что, не смотря на значительную долю потерь энергии инжектируемых частиц при уходе из ловушки из-за углового рассеяния, рассмотренная система выглядит перспективной с точки зрения сознания источника термоядерных нейтронов на ее основе. Если окажется необходимым дальнейшее повышение эффективности, это может быть достигнуто при повышении потенциальных барьеров.

Кинетика инжектируемых частиц играет, видимо, важнейшую роль в общем энергобалансе плазмы таких систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-08-00137-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирнов В.В., Рютов Д.Д. Газодинамическая линейная ловушка для удержания плазмы // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5, Вып. 11. С. 678–682.
2. Anikeev A.V., Bagryansky P.A., Ivanov A.A., et al. Confinement of strongly anisotropic hot-ion plasma in a compact mirror // J. Fusion Energy. 2007. V. 26. P. 103–107.
3. Bagryansky P.A., Ivanov A.A., Kruglyakov E.P., et al. Gas dynamic trap as high power 14 MeV neutron source // Fusion Engineering and Design. 2004. V. 70. P. 13–33.
4. Карпушов А.Н. Численное исследование возможности получения ионно-горячей плазмы с $\beta \sim 1$ на установке ГДЛ. Препринт № 96-84 ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск, 1996.
5. Хвесюк В.И., Чирков А.Ю. Производство энергии в амбиполярных реакторах с D–T, D– ^3He и D–D топливными циклами // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 21. С. 61–66.
6. Чирков А.Ю., Хвесюк В.И. К расчету функций распределения высокоэнергетических ионов по скоростям // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2003. Вып. 1. С. 55–65.
7. Karney C.F.F. Fokker–Planck and quasilinear codes // Computer Phys. Reports. 1986. V. 4. P. 183–244.
8. Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D.L. Fokker–Planck equation for an inverse-square force // Phys. Rev. 1957. V. 107. P. 1–6.
9. Трубников Б.А. Приведение кинетического уравнения в случае кулоновских столкновений к дифференциальному виду // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 1341–1343.
10. Devaney J.J., Stein M.L. Plasma energy deposition from nuclear elastic scattering // Nucl. Sci. Eng. 1971. V. 46. P. 323–333.
11. Сивухин Д.В. Кулоновские столкновения в полностью ионизованной плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 4. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964. С. 81–187.
12. Путвинский С.В. Альфа-частицы в токамаке // Вопросы теории плазмы. Вып. 18. / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1990. С. 209–315.
13. Миямото К. Основы физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза. М.: Физматлит, 2007. § 17.3.