

ЗАМКЫКАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНЫХ ЧИСЕЛ ШМИДТА И ШЕРВУДА

В.А. Фрост

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1*

Аннотация

Работа посвящена изучению возможностей использования уравнения для двухточечной корреляционной функции скалярного поля (УКФС) для описания различных режимов турбулентных течений. Описано применение метода моментов для замыкания УКФС (уравнения Корсина). Связь диссипативных факторов с корреляционными функциями позволяет в рамках данного подхода выписать выражения для всех необходимых для расчета параметров, таких как коэффициент турбулентной диффузии, характерное время перестройки скалярного поля и коэффициент вихревой вязкости, определяющий третьи смешанные моменты. Результирующая система уравнений оказывается нелинейной, характерным примером чего является зависимость коэффициента турбулентной диффузии от структуры скалярного поля. Метод моментов используется также для определения влияния градиента среднего поля на корреляционные функции.

Рассматривается перенос пассивной, то есть не влияющей на параметры поля скорости, примеси (скаляра) в турбулентном потоке постоянной плотности в канале постоянного сечения, размеры которого соответствуют экспериментальным данным J. Comte-Bellot. Необходимые для расчета параметры вычисляются по экспериментальным данным.

Расчет проводится при некоторых предположениях, позволяющих уменьшить число независимых переменных. Получены распределения по каналу средних значений и интенсивностей пульсаций скаляра, скалярной диссипации (внутреннего масштаба), коэффициента турбулентной диффузии и турбулентного числа Шмидта. Получена, также, зависимость числа Шервуда (аналог числа Нуссельта для массопереноса) от числа Шмидта, построенного по термодинамическим свойствам среды.

CLOSURE OF THE SCALAR FIELD CORRELATION EQUATION AND CALCULATION OF THE SCHMIDT AND SHERWOOD TURBULENT NUMBERS

The method of the moments is used to make more accurate before the found closing of the equation for correlation function of a scalar. The scalar is supposed passive, that is not influencing on parameters of turbulence. Conditions of applicability before the found method of closing are found. The tensor form for a flux and the third moments allows to receive non-isotropic distribution scalar dissipation. Unlike previous the offered approach allows to define spatial distribution of turbulent diffusivity.

The turbulent field parameters necessary for calculation of distribution of a scalar in the plane channel, which boundary values of the scalar are given, are defined on experimental data J. Comte-Bellot. Distributions of averages, intensity of fluctuations, scalar dissipation and the turbulent Schmidt number are calculated. Dependence of the Sherwood number on molecular diffusivity (Schmidt number) is received also.

1. ВВЕДЕНИЕ

Возросшие в последнее десятилетие возможности современных вычислительных средств, а также доступность и удобство современного программного обеспечения, привело к расширению перечня задач, решение которых становится реально возможным. Среди них, на одном из первых мест, находится проблема расчета турбулентных течений. Несмотря на то, что прямое численное интегрирование уравнений Навье–Стокса позволяет проводить расчеты турбулентных режимов течения, расчет большого количества реализаций, необходимых для статистической достоверности результатов усреднения, делает эти расчеты весьма дорогостоящими. Переход к расчету по уравнениям для средних параметров, моментов различных порядков или распределений вероятностей мог бы существенно удешевить вычисления. Однако все способы получения уравнений для средних, моментов и вероятностей, исходя из уравнений гидродинамики, приводят к незамкнутым системам уравнений. До сих пор все многочисленные попытки построить замкнутую

систему приводили только к весьма ограниченным областям применимости конкретных способов замыкания. Это делает актуальным все попытки построения замкнутых систем уравнений.

Данная статья посвящена продолжению исследований по использованию уравнения для корреляционной функции скалярного поля для описания различных режимов турбулентных течений [1,2,3]. Ранее была найдена некоторая процедура замыкания УКФС, использующая корреляционную функцию поля скорости. Это замыкание было построено путем сложной цепочки рассуждений, точность и условия применимости которых, хотелось бы определить.

В данной работе замыкание УКФС строится на основании метода моментов, основанного на упрощенной системе динамических уравнений. Удалось не только подтвердить ранее найденную форму третьих моментов, но и уточнить некоторые предположения. Оказалось, что гипотеза Прандтля выполняется только при выполнении большого числа предположений, таких как, равенство нулю некоторых третьих моментов, семиинварианта четвертого порядка и др. Обнаружена

связь коэффициента турбулентной диффузии и скалярной диссипации. Наиболее существенным оказалось уточнение источников членов в УКФС. Кроме того, выражение для третьих моментов удалось записать в тензорной форме, что позволяет производить оценку влияния возможной неизотропии скалярной диссипации на течение.

Во второй части работы для иллюстрации возможности использования УКФС приведены результаты расчета параметров скалярного поля в плоском канале. Необходимые для расчета параметры потока вычисляются по экспериментальным данным [4]. Показано, что имеющийся объем экспериментальных данных достаточен для проведения вычислений. Трудности возникают только при определении коэффициента турбулентного трения и внутреннего масштаба турбулентного поля, для которых пришлось применять искусственное сглаживание результатов. Кроме того, с целью уменьшения вычислительных трудностей в расчете использовалось несколько увеличенное значение для внутреннего масштаба турбулентного поля скорости и применялась некоторое перестроение корреляционных функций поля скорости. Проведенные вычисления позволили получить распределение по каналу средних значений и интенсивностей пульсаций скаляра, скалярной диссипации и турбулентного числа Шмидта. Получена также зависимость числа Шервуда (аналог числа Нуссельта для массопереноса) от числа Шмидта, построенного по термодинамическим свойствам среды.

2. ЗАМЫКАНИЕ УКФС НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ

2.1. Постановка задачи

Рассматривается перенос пассивной, т.е. не влияющей на параметры поля скорости, примеси (скаляра) в турбулентном потоке постоянной плотности. Все необходимые сведения о турбулентном поле предполагаются известными. В принципе, в потоке возможно изменение значения скаляра в результате химической реакции, зависимость для скорости которой предполагается известной [3]. Но в данном исследовании химические процессы не рассматриваются.

Приведенный ниже вывод получен при следующих предположениях:

- 1) плотность среды постоянна;
- 2) химическая реакция не рассматривается;
- 3) турбулентность стационарна, однородна и изотропна;
- 4) среднее поле скорости однородно, что позволяет исключить его из рассмотрения;
- 5) моментами высших порядков пренебрегается;
- 6) предполагается равновесие между диссипативными и источниками членами;
- 7) предполагается, что семиинвариант четвертого порядка $\langle u_i u_j c_1 c_2 \rangle = 0$;
- 8) параметры переноса определяются в условиях отсутствия переноса. Похожая ситуация имеет место в молекулярной физике при вычислении коэффициентов переноса.

Если предположения пп. 1–4 и 8 связаны с выбором режима и поэтому не вызывают опасений, то

предположения пп. 4–7 могут приводить к физически неверным результатам. Таким, например, как появление отрицательных плотностей распределения вероятностей или отрицательным значениями спектральных плотностей, что можно назвать проявлением статистической недостоверности модели. Для проверки отсутствия отрицательных значений спектральных плотностей были проведены расчеты изменения спектров при вырождении турбулентности [5], которые показали положительность спектров на всем протяжении периода вырождения.

2.2. Уравнения метода моментов

Ранее при замыкании уравнения Корсина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} R(\mathbf{r}, t) + 2 \operatorname{div}_r \langle (u_1 - u_2) c(x_1, t) c(x_2, t) \rangle = \\ = 2 D m \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

использовалась градиентная гипотеза и некоторые соображения размерности условия применимости которых совершенно неясны. Одной из возможностей более формального подхода является метод моментов, который не только позволяет получить замкнутую форму необходимых нам уравнений, но и выявить основные предположения и ограничения способа замыкания, возникающие взаимозависимости и т.п.

Наиболее просто проследить возможности метода моментов на примере получения замкнутого уравнения для потока скаляра. Для этого используем вместо уравнения молекулярной диффузии и Навье–Стокса уравнения упрощенной динамической системы:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\alpha u'_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = -\beta c' - u'_j \frac{\partial C}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Здесь использованы простейшие ланжевенские представления для диссипативных членов. Связь величин α и β с распределением КФС определяется из соотношений для скоростей диссипации, полученных из точных уравнений:

$$\alpha = \nu_m \cdot \Delta_r (B) \Big|_{r=0}, \quad \beta = D_m \cdot \Delta_r (R) \Big|_{r=0}.$$

Такая связь позволяет говорить о величинах α и β как о характерных обратных временах диссипативных процессов, что полностью соответствует смыслу их введения в динамические уравнения. Последние соотношения иллюстрируют тот факт, что, если рассматриваются совместно уравнения для корреляционных функций скаляра и скорости, то проблема их замыкания сводится к определению зависимостей для величин α и β .

Перекрестное умножение уравнений (1) и (2) на соответствующие отклонения, сложение результатов и усреднение приводит к уравнению для компонент вектора потока:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -(\alpha + \beta) q_i - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial C}{\partial x_j} - \left\langle u'_i u'_j \frac{\partial c'}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (3)$$

Одним из достоинств метода моментов является то, что уравнения для получаемых моментов описывают их изменение по времени. Это позволяет в рамках такого подхода описать изменение эффективных коэффициентов переноса, как это имеет место для распространения примеси из точечного источника [6].

В случае равновесия между диссипативными и порождающими слагаемыми и пренебрежения третьими моментами получаем закон Фика, который может быть записан как скалярное произведение одноточечного тензора корреляций скорости $\bar{B}(0)$ на вектор градиента среднего поля:

$$q_i = -\frac{(\bar{B}(0) \cdot \text{grad} C)}{\alpha + \beta}.$$

Такой подход позволяет определить тензор турбулентной диффузии, который определяется диссипативными процессами и характеристиками турбулентного поля скорости и скаляра. При изотропии турбулентного поля скорости получаем выражение для коэффициента турбулентной диффузии

$$D_T = \frac{\langle u'^2 \rangle}{\alpha + \beta}. \quad (4)$$

Для уточнения представления источникового члена в УКФС нам потребуется уравнение для двухточечного момента $\langle c'_1 v'_2 \rangle$, в который входят отклонения скорости и скаляра в различных точках. Как и ранее выполняя перекрестное умножение уравнений (1) и (2), сложение и усреднение, пренебрегая третьими моментами и предполагая равновесие между порождением и диссипацией, получим

$$\langle c_2 v_1 \rangle = -\frac{(\bar{B}(r) \cdot \text{grad} C_2)}{\alpha + \beta}.$$

Аналогично, производя соответствующие умножения и усреднения, можно получить выражение для третьего момента $M_{ccu} = \langle (u'_2 - u'_1) c'(x_1, t) c'(x_2, t) \rangle$, входящего в УКФС:

$$\frac{\partial M_{ccu}}{\partial t} = -(\alpha + \beta_1 + \beta_2) M_{ccu} - (\langle u_2 u_{j,1} \rangle - \langle u_1 u_{j,1} \rangle) \left(\frac{\partial \langle c_1 c_2 \rangle}{\partial x_{j,2}} - \frac{\partial \langle c_1 c_2 \rangle}{\partial x_{j,1}} \right).$$

Для получения соотношения, соответствующего закону Фика, надо предположить равновесие процессов порождения и диссипации и изотропию турбулентности:

$$(\alpha + \beta_1 + \beta_2) M_{ccu} = -2[B_{LL}(0) - B_{LL}(r)] \text{grad}_r \langle c_1 c_2 \rangle. \quad (5)$$

Здесь правая часть есть скалярное произведение тензора $B(0) - B(r)$ на вектор $\text{grad}_r \langle c_1 c_2 \rangle$. При изотропии КФСП выражение для третьего момента существенно упрощается:

$$M_{ccu} = \frac{\langle u'^2 \rangle (1 - f(r))}{(\alpha + \beta_1 + \beta_2)} \frac{\partial R}{\partial r}. \quad (6)$$

Величину $\frac{\langle u'^2 \rangle (1 - f(r))}{(\alpha + \beta_1 + \beta_2)}$ будем, следуя Э. О'Брайену

[6], рассматривавшему двухточечные плотности распределения вероятностей для скаляра, называть коэффициентом вихревой вязкости и, следовательно, (6) представляет вихревую вязкость, для которой далее будем использовать обозначение ν_s .

Имеется довольно значительный опыт построения аналогичных замыканий для уравнения для КФС (уравнение Кармана-Ховарта). Величина, аналогичная ν_s при этом называется турбулентной вязкостью, и выражение для ν_s (6) может быть сравнено с известными предложениями. Ниже в хронологическом порядке приведены близкие по форме выражения различных авторов:

- K. Hasselmann (1958) $\nu_s = \tau(r) \langle u'^2 \rangle (1 - f(r))^2$
- A.M. Обухов (1965) $\nu_s \sim (1 - f(r))^{3/2}$
- M.Д. Миллионщиков (1969) $\nu_s \sim r f(r)^{1/2}$
- Ю.М. Лыткин (1976) $\nu_s \sim r (1 - f(r))^{1/2}$
- J.A. Domoradzaki, G.L. Mellor (1983) $\nu_s \sim r^{4/3} \epsilon^{1/3}$
- N. Peters, M. Oberlack (1993) $\nu_s \sim (1 - f(r))^{1/2}$
- В.П. Красицкий, В.А. Фрост (2005) $\nu_s = \tau \langle u'^2 \rangle (1 - f(r))$

Здесь знак равенства в этом перечислении используется в случае получения результатов в процессе анализа процесса взаимодействия вторых и третьих моментов. В случае получения выражения из соображений размерности и других эвристических соображений используется знак пропорциональности.

Выражения, приведенные в третьей и пятой строках, не удовлетворяют требованию отсутствия диссипации при нулевых значениях молекулярных коэффициентов переноса (см. далее).

Структура выражения для вихревой вязкости (6) допускает анализ механизма действия этого слагаемого в УКФС. Форма этого слагаемого позволяет трактовать его как диффузионный перенос с коэффициентом диффузии, зависящим от r . Так как величина $(1 - f(r))$ пропорциональна структурной функции, то зависимость от r такова, что при $r \rightarrow 0$ $\nu_s \sim r^2$. Это означает, что КФС изменяется так, что интенсивность флуктуаций скалярного поля в однородных условиях, описываемая величиной $R(0)$, при отсутствии молекулярной диффузии остается неизменной. Это обстоятельство является центральным при описании реагирующих потоков, когда интенсивность микросмещения, процесса ответственного за доставку реагентов в зону реакции, не должна напрямую зависеть от третьих моментов. Для этого необходимо, чтобы $\nu_s \sim r^n$ с $n \geq 2$.

Остальная же часть КФС, как любое распределение в среде с диффузией, расширяется на все более широкую область. Причем, при малых r величина КФС уменьшается, форма КФС становится более острой при малых r , а собственно расширение происходит при больших r . Такой процесс, приводящий к росту кривизны КФСП в нуле, можно назвать декорреляцией. При расчетах соответствующего уравнения для спектра [5] происходит передвижение спектра в об-

ласть больших волновых чисел, как это и должно происходить.

И, в заключение, величина $(1-f(r))$, являющаяся главной действующим фактором в процессе перестройки поля скаляра под действием турбулентного поля скорости, пропорциональна, как это упоминалось ранее, структурной функции продольной компоненты скорости, которая характеризует растяжение среды под действием турбулентности. Растяжение же является главным фактором, сближающим изоскалярные поверхности и, тем самым, вызывающим увеличение градиентов скалярного поля.

3. РАСЧЕТ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

3.1. Подготовка исходных данных

Возможности, возникающие при использовании УКФС, будут проиллюстрированы на примере, соответствующем экспериментальным исследованиям [4]. Расчеты проводятся в предположении, что число Рейнольдса равно 10^5 . В качестве характерного масштаба длины выбирается полуширина канала. Это позволяет, используя приведенные в безразмерной форме экспериментальные данные, вычислить скорость в центре канала и другие параметры, например, значение производной от средней скорости, величину динамической скорости и др.

Для поведения расчетов табличные данные и результаты, приведенные в графической форме, аппроксимируются сплайнами третьего порядка, что позволяет при расчетах пользоваться ими как непрерывными функциями (рис. 1 и 2). Распределения некоторых параметров, см. например, рис. 3 и рис. 4, вычисляемые с использованием сплайн-аппроксимации приводили физически неверным результатам из-за потери точности при вычислении производных по сплайн-аппроксимациям. В этом случае по методу наименьших квадратов находились достаточно гладкие полиномиальные распределения.

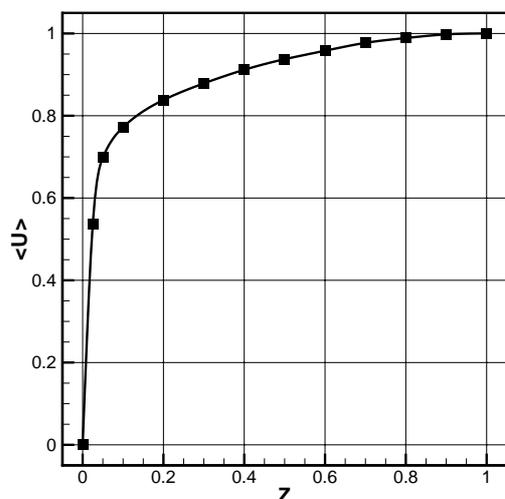


Рис. 1. Распределение по ширине канала осредненной скорости потока. Символы соответствуют данным [4], кривая – сплайн-аппроксимация

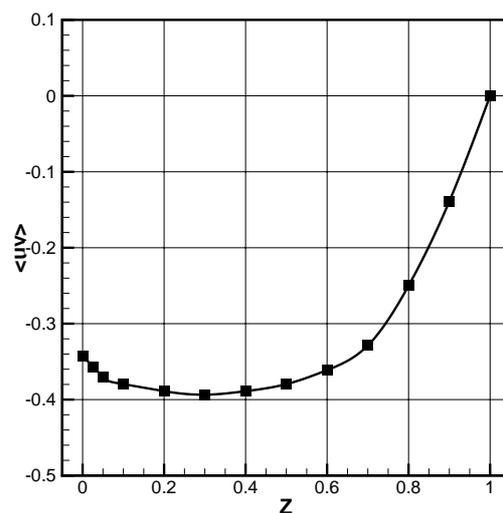


Рис. 2. Распределение по ширине канала турбулентного трения. Символы соответствуют данным [4], кривая – сплайн-аппроксимация. Как и на рис.1 изображено распределение от стенки ($z=0$) до центра канала ($z=1$)

Наибольшие сложности вызвало построение аппроксимации для корреляционной функции поля скорости. Ни в таблицах, ни, тем более, на графиках, не удалось увидеть «правильное» поведение корреляционных функций вблизи нуля. В то же время поведение КФПС в этой области является определяющим для скалярного поля. Поэтому для расчетов КФПС строится следующим образом: внутренний масштаб поля скорости задается независимо (рис. 4). Это значение используется при описании поведения КФПС около нуля, где КФПС задается параболой $R = 1 - r^2 / (2\lambda^2)$, а экспериментальная функция сдвигается в сторону больших r так, чтобы обеспечить касание к этой параболе.

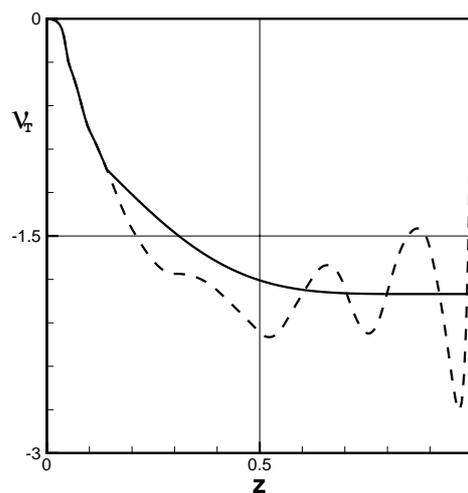


Рис. 3. Распределение по ширине канала коэффициента турбулентного трения. Пунктир – результат расчета по сплайн-аппроксимациям турбулентного трения и производной от средней скорости. Сплошная кривая – результат сглаживания по методу наименьших квадратов

Полученное значение сдвига используется при построении сплайн-интерполяции. Схема такого построения и величина сдвига приведены на рис. 5.

Пунктирная прямая на рисунке показывает место, в котором производится склейка.

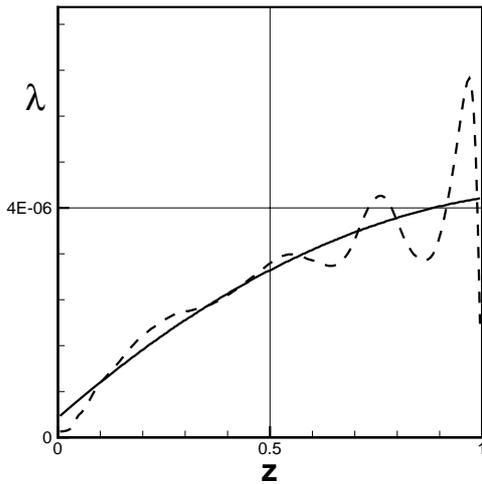


Рис. 4. Распределение по ширине канала внутреннего масштаба поля скорости. Пунктир – результат расчета по сплайн-аппроксимациям. Сплошная кривая – результат сглаживания по методу наименьших квадратов

Эта процедура связана с удовлетворением требований к коэффициенту вихревой диффузии. Для того, чтобы под действием поля скорости не происходили изменения интенсивности пульсаций скаляра, надо чтобы при $r \rightarrow 0$, $v_s \sim r^2$, что возможно только при $\partial f(r) / \partial r|_{r=0} = 0$.

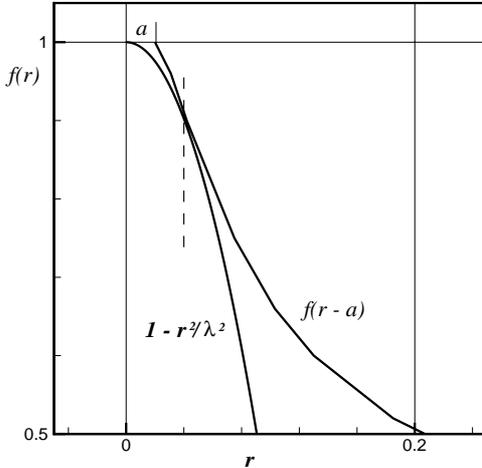


Рис. 5. Схема перестроения КФПС при малых r

Для начала расчетов необходимо определение также параметра β , который может быть вычислен, если предположить, что нам известно или задано значение турбулентного числа Шмидта Sc_T . Выражая коэффициент турбулентной диффузии из (4), получим

$$Sc_T = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha}$$

Некие физические соображения, высказываемые во многих ранних публикациях (см. например [7]), приводят к соотношению $\beta = 0.5\alpha$, что соответствует значению числа Шмидта равному 0.75. Это позволяет определить начальное значение параметра β . В дальнейшем в процессе расчетов будет определено дейст-

вительное распределение этого параметра, распределение коэффициента турбулентной диффузии и числа Шмидта, которое уже не будет постоянным.

3.2. Проведение расчетов

С целью упрощения расчетов, скалярная диссипация считается изотропной, но изменяющейся по ширине канала. Ранее [2] было показано, что такое упрощение не вносит принципиальных отличий в решение. В этом случае, пренебрегая зависимостью КФС от направления вектора \mathbf{r} , и полагая его направленным по ширине канала, мы получаем возможность уменьшить число независимых переменных. Также предполагается отсутствие стефановского потока и отсутствие влияния продольного переноса. Пренебрежение стефановским потоком делается с целью получения симметричного распределения скаляра по ширине канала, что используется как один из критериев правильности расчетов. Пренебрежение продольным переносом означает, что сечение, в котором проводится расчет, находится достаточно далеко от входа в канал и профиль продольной скорости может считаться установившимся.

Система уравнений, описывающая перенос примеси в плоском канале, состоит из уравнения для среднего поля:

$$\frac{\partial}{\partial z} (D_T(z) + D_m) \frac{\partial}{\partial z} C(z) = 0$$

и уравнения для КФС:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (D(z) + D_m) \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 (v_s + 2D_m) \frac{\partial R}{\partial r} + \\ & + \frac{B(r)}{\langle u'^2 \rangle} \left[D_T \left(z + \frac{r}{2} \right) + D_T \left(z - \frac{r}{2} \right) \right] \times \\ & \times \frac{dC(z)}{dz} \Big|_{z+r/2} - \frac{dC(z)}{dz} \Big|_{z-r/2} = 0. \end{aligned}$$

Расчетная область и граничные условия. Уравнение для среднего решается на интервале $z = (0, 2)$ с граничными условиями

$$z = 0, C(0) = 0; \quad z = 2, C(2) = 1.$$

Уравнение для КФС решается на треугольнике ($r \geq 0, z \in (0, 2), r \leq \min(z, 2-z)$) с граничными условиями

$$r = 0, \frac{\partial R(z, 0)}{\partial r} = 0; \quad r = \min(z, 2-z), R(z, r) = 0.$$

Решение строилось при помощи процедур *DBVFPD* для среднего поля и *DLSLXG* для КФС, взятых из библиотеки *IMSL*. Первая, из которых реализовывала метод Ньютона для краевой задачи с автоматическим выбором сетки, вторая – прямой способ обращения разреженной матрицы при помощи *LU* факторизации с использованием стратегии Марковица. Метод не очень быстрый, но единственный из многих испытанных, который обеспечивал получение симметричного решения. Решение строилось посредством организации циклов, в каждом из которых сначала рассчитывалось среднее поле, которое использовалось

затем при расчете источниковых членов в уравнении для КФС. Оказалось, что 10 циклов достаточно для сходимости.

Результаты расчетов. Определяемые в процессе расчета распределения величины β позволяют получить распределение турбулентного числа Шмидта по сечению канала (рис. 6).

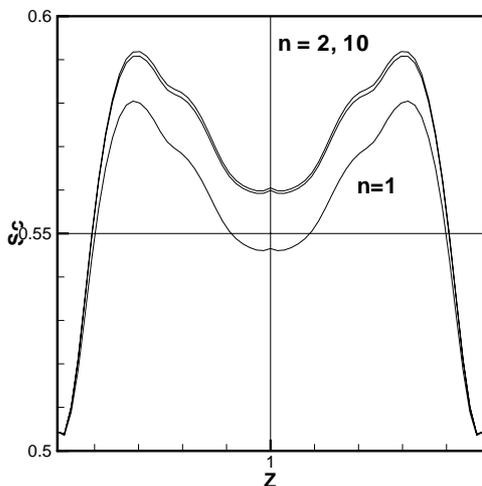


Рис. 6. Распределение по ширине канала турбулентного числа Шмидта

Величина n , приведенная на рисунке, соответствует номеру цикла. Видно, что основная форма распределения получается уже на первом цикле, а при $n = 10$ практически достигается сходимость к искомому решению.

На рис. 7 приведено распределение коэффициента турбулентной диффузии. Кривая, соответствующая $n = 0$, представляет исходное распределение, полученное в предположении, что число $Sc_T = 0.75$. Любопытно, что найденное распределение по форме очень близко начальному.

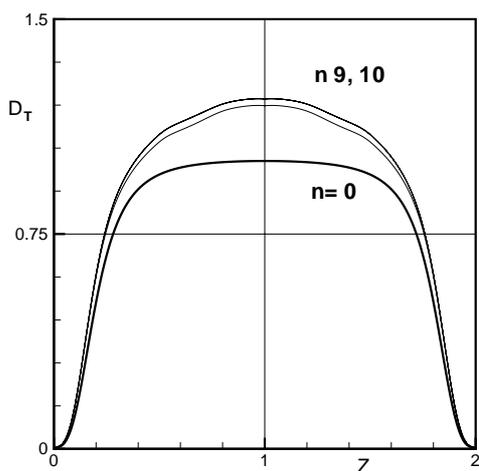


Рис. 7. Распределение по ширине канала коэффициента турбулентной диффузии

На рис. 8 приведено распределение обратной величины характерного времени β , которое эквивалентно распределению по каналу интенсивности перемешивания (микросмешения). Любопытно, что смешение максимально вблизи стенок, что естественно связано с

зоной больших градиентов среднего поля. Но провал, соответствующий границе погранслоя, требует дополнительного объяснения.

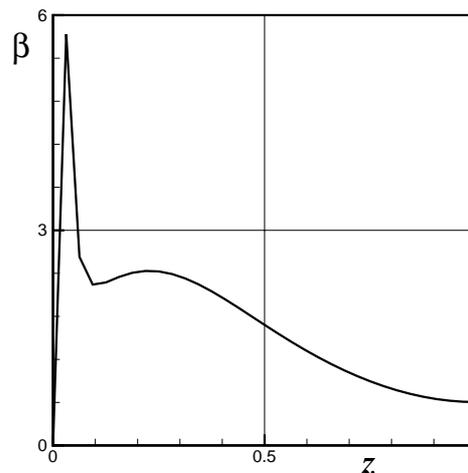


Рис. 8. Распределение величины $1/\beta$, пропорциональной интенсивности микросмешения, по ширине канала

На рис. 9 приведена зависимость турбулентного потока q от молекулярного коэффициента диффузии D_m . В безразмерных переменных этот рисунок может быть воспринят как число Шервуда умноженное на молекулярный коэффициент диффузии.

Это позволяет оценить степень в законе:

$$Sw_T = \text{const} \cdot Sc^p \quad (7)$$

На рисунке изображена линия, позволяющая оценить показатель степени p в законе (7). Полученная закономерность $q \approx D_m^{0.65}$ соответствует степени 0.35 в соотношении, связывающем число Шервуда (аналог числа Нуссельта) с молекулярным числом Шмидта. Экстраполяция рассчитанных значений на параметры воздуха дает значение турбулентного числа Шервуда $Sw = 400$. Такое же значение имеет отношение турбулентной и кинематической вязкости.

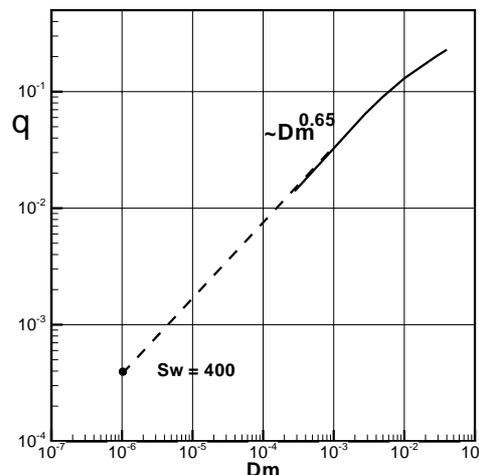


Рис. 9. Зависимость турбулентного потока q от молекулярного коэффициента диффузии D_m – сплошная линия. Пунктирная линия аппроксимирует результаты, полученные в ограниченном диапазоне значений, на значения, характерные для воздуха (точка)

На рис. 10 приведены значения турбулентного числа Шервуда, соответствующие рис. 9. Особенностью проведенных расчетов является неизменность числа Рейнольдса, это означает, что изменения величины D_m соответствуют независимому изменению числа Шмидта, т.е. переходу к другому веществу с другими термодинамическими параметрами.

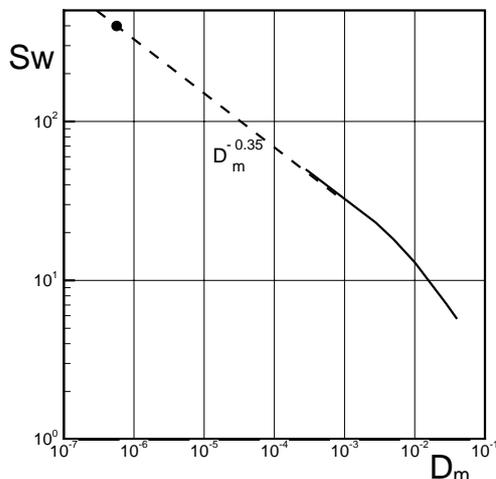


Рис. 10. Зависимость турбулентного числа Шервуда от коэффициента диффузии

На рис. 11 приведены распределения среднего значения скаляра по ширине канала. Значения величины D_m от кривой к кривой отличаются в десять раз. При очень больших значениях коэффициента D_m распределение средних должно вырождаться в прямую линию $C(z) = z/2$. При этом величина потока будет прямо пропорциональна величине D_m , что соответствует тому, что значение турбулентного числа Шервуда станет равно единице. Это означает отсутствие влияния турбулентного поля скорости на величину потока скаляра.

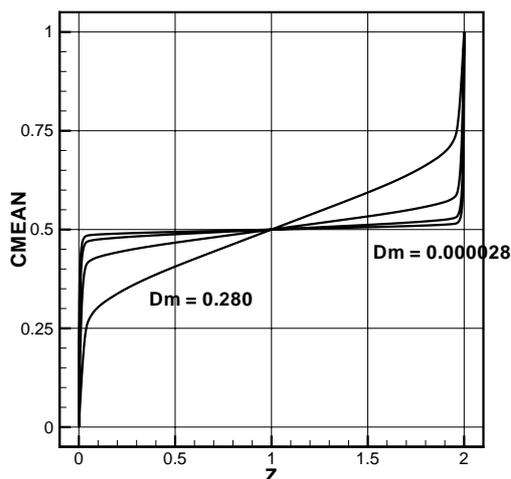


Рис. 11. Распределение по ширине канала среднего значения скаляра C

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод моментов, использующий упрощенную систему уравнений, позволяет получить выражения для третьих моментов и замкнуть уравнение для корреляционной функции скалярного поля. Полученные не-

стационарные уравнения для вторых и третьих моментов позволяют учесть их возможную неравновесность. Предположения о балансе между диссипацией и порождением приводит к соотношениям типа закона Фика.

Полученная в результате система уравнений, состоящая из уравнения для среднего значения и для корреляционной функции скаляра при известных параметрах турбулентного поля скорости достаточна для описания переноса примеси в турбулентном потоке. Используемые уравнения содержат молекулярные коэффициенты вязкости и диффузии, что позволяет определять зависимость турбулентных чисел Нуссельта и Шервуда от чисел Прандтля и Шмидта.

Работа поддержана программой ОЭММПУ № 1 "Интегрированные модели физической механики" 2008.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $c(x_{12}, t)$ – мгновенное значение скаляра;
- $C(x_{12})$ – среднее значение скаляра;
- $c'(x_{12}, t) = c(x_{12}, t) - C(x_{12})$ – отклонение мгновенного значения скаляра от среднего;
- $D_T(x_{12}, t)$ – коэффициент турбулентной диффузии;
- D_m – молекулярный коэффициент диффузии;
- $\text{div}_{r|\eta}(u)$ – дивергенция вектора аргумента по переменной, обозначенной индексом;
- $f(r)$ – корреляционная функция продольной компоненты турбулентной скорости $B_{11}(r)/\langle u^2 \rangle$;
- $r = x_1 - x_2$ – вектор, соединяющий точки x_1 и x_2 ;
- $R(x_1, x_2, t)$ – корреляционная функция скалярного поля;
- $V(t)$ – корреляционная функция поля скорости (тензор);
- t – время;
- U_{12} – средняя скорость в соответствующих точках;
- x_{12} – пространственная координата рассматриваемых точек;
- $z | \eta = (x_1 + x_2)/2$ – положение центра отрезка, связывающего точки x_1 и x_2 ;
- α – характерное обратное время диссипации флуктуаций поля скорости;
- β – характерное обратное время диссипации флуктуаций скалярного поля;
- λ – микромасштаб турбулентного поля скорости;
- ν_m – кинематический коэффициент вязкости;
- ν_s – коэффициент вихревой диффузии (декорреляции);
- ν_T – коэффициент турбулентного трения ($\frac{\langle uv \rangle}{\partial U / \partial y}$);
- $\mathbf{q} = (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3)$ – вектор потока скаляра;
- Sc_m – число Шмидта (ν_m / D_m);
- Sc_T – турбулентное число Шмидта (ν_T / D_T);
- Sw – число Шервуда, диффузионный аналог числа Нуссельта ($\frac{q \cdot L}{D_m \cdot [C(2) - C(0)]}$);
- $\langle \dots \rangle$ – усреднение по реализациям или по времени для стационарных в среднем величин.

Аббревиатуры:

- КФС – корреляционная функция скалярного поля;
- УКФС – уравнение для корреляционной функции скалярного поля;

КФПС – корреляционная функция поля скорости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красицкий В.П., Фрост В.А. Молекулярный перенос в турбулентных потоках//Изв. РАН, Механика жидкости и газа. 2007. №2, С. 46–58.
2. Красицкий В.П., Фрост В.А. Уравнение для корреляционной функции и плотность распределения вероятности скаляра в турбулентных реагирующих потоках// Препринт ИПМех РАН, 2007. №833. С. 20.
3. Бабенко В.А., Фрост В.А. Зависимость скалярной диссипации от химических превращений в турбулентных реагирующих потоках//Препринт ИПМех РАН, 2007. №840. С. 30.
4. G. Comte-Bellot, Ecoulement Turbulent entre deux Parois Paralleles. PSeTdMdA, Paris, 1965. P. 175. (перевод) Ж. Конт-Белло, Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М: Мир, 1968. 176 с.
5. Фрост В.А. Расчет вырождения изотропной турбулентности с использованием аппроксимации Хассельмана//Труды 2-ой Всероссийской школы-семинара «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем» 2008. М: Ипмех РАН, С. 171–175.
6. Fedorov A., Frost V., Kaminsky V. Turbulent transfer modeling in flows with chemical reactions//Transport phenomena in combustion: Proc. 8th Intern. Symp: Ed. by S.H. Chan. San Francisco: Taylor and Francis. 1995. V. 2. P. 933–944.
7. Лушик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнения переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов//Итоги науки и техники, МЖГ, 1988, т. 22, С. 3–61.
8. Tsai K., O'Brien E.E. A hybrid one- two-point approach for isothermal reacting flows in homogeneous turbulence//Phys. Fluids 1993, A 5(11), p. 2901–2910.