

## ЭФФЕКТ УЧЕТА СЛАБОЙ СЖИМАЕМОСТИ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А.А. Роговой

*Институт механики сплошных сред УрО РАН,  
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1*

### Аннотация

В рамках конечных деформаций для реального слабосжимаемого упругого материала строится аналитическое решение задачи о поведении длинного полого цилиндра, жесткая внешняя поверхность которого смещается в осевом и круговом направлениях по отношению к внутренней поверхности, нагруженной давлением. Оказалось, что внешняя поверхность цилиндра, закрученная в азимутальном и сдвинутая в осевом направлениях фиксированными силами, раскручивается и натягивается обратно при приложении внутреннего давления. Этот эффект значительно сильнее известного эффекта Пойнтинга, проявляется только при учете слабой сжимаемости материала и объясняется значительным возрастанием «модуля сдвига» при сжатии (относительном изменении объема).

### EFFECT OF ALLOWANCE FOR SLIGHT COMPRESSIBILITY OF ELASTIC MATERIAL UNDER FINITE DEFORMATIONS

In framework of the finite deformations the analytical solution has been constructed for a long hollow cylinder made of a real slightly compressible material. The external rigid surface of the cylinder is displaced in the axial and azimuthal directions with respect to the internal surface subjected to pressure. It was found that the external cylinder surface, twisted in the azimuthal and sheared in the axial directions by fixed forces, is untwisted and stretched back when the internal pressure has been applied. This effect being considerably stronger than the well-known Pointing effect displays itself only when the material slight compressibility is taken into account and is explained by a marked increase in the shear modulus under pressure (relative volume change).

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство эластомеров, допускающих конечные упругие деформации, обычно слабосжимаемые. Для многих практически важных задач эти материалы аппроксимируют несжимаемыми, что часто оправдано, и определяющие уравнения для несжимаемых материалов и численные методы реализации задач с этими определяющими уравнениями хорошо известны. Развивается теория и слабосжимаемых материалов при конечных деформациях. Однако ее применение оправдано в случаях или сильно стесненной деформации, или действия высокого гидростатического давления, что по сути одно и то же. Во всех других ситуациях теории несжимаемых и слабосжимаемых материалов приводят к практически одинаковым результатам. Поэтому представляется интересным рассмотреть такие задачи, в которых учет слабой сжимаемости приводит к результатам, существенно отличным от полученных в рамках теории несжимаемого материала. Это задачи, в которых учитывается известный экспериментальный факт изменения «объемного модуля» и «модуля сдвига»<sup>1</sup> при изменении объема. В работах [1–3] предложена теория, описывающая поведение таких матери-

алов, и построены аналитические решения некоторых задач. Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении.

### 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В работах [2, 3] предложен потенциал

$$W = \hat{W} + \sigma (J^2 - 1) - \alpha (\sigma - \chi_1)^2 / 2,$$

$$J = I_3(\mathbf{F}), \quad \mathbf{F} \text{ – градиент места,}$$

позволяющий описывать конечные деформации начально изотропного слабосжимаемого упругого материала. Здесь

$$\hat{W} = k_1 (\hat{I}_1 - 3) + k_2 (\hat{I}_2 - 3), \quad \sigma = \chi_1 + \chi_2 (J^2 - 1),$$

$$\chi_1 = p_1 (\hat{I}_1 - 3) + p_2 (\hat{I}_2 - 3),$$

$$\chi_2 = \chi_{20} + q_1 (\hat{I}_1 - 3) + q_2 (\hat{I}_2 - 3),$$

$$\hat{I}_1 = I_1 - (I_3 - 1), \quad \hat{I}_2 = I_2 - 2(I_3 - 1), \quad \alpha = 1/\chi_2, \quad (1)$$

$I_1, I_2, I_3 = J^2$  – инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ ,  $k_1, k_2, p_1, p_2, q_1, q_2, \chi_{20}$  – параметры материала, для которых, как показано в работах [2,3], справедливы следующие соотношения:  $2(k_1 + k_2) = G$ ,  $G$  – модуль сдвига,  $p_i = p_{i0} G$ ,  $q_i = q_{i0} G$ , для  $i = 1, 2$ . Этот упругий потенциал приводит к следующему соотношению для тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода

$$\frac{\mathbf{P}_{II}}{2} = \sigma I_3 \mathbf{C}^{-1} + (\mathbf{g} - I_3 \mathbf{C}^{-1}) c_1 +$$

$$+(I_1 \mathbf{g} - \mathbf{C} - 2 I_3 \mathbf{C}^{-1}) c_2,$$

$$\alpha (\sigma - \chi_1) = I_3 - 1, \quad \alpha = 1/\chi_2,$$

<sup>1</sup> При конечных деформациях выражения, определяющие модуль сдвига и объемный модуль, зависят от конкретной задачи, т.е. для разных задач они разные. В этом нет ничего удивительного, поскольку гидростатика при конечных деформациях определяется не только изменением объема, но и изменением формы. И наоборот, изменение объема определяется и шаровой и девiatorной частями тензора напряжений. В связи с этим понятия «объемный модуль» и «модуль сдвига» – условные терминологически удобные понятия, но при этом нужно обязательно привязывать их к конкретной задаче. Поэтому они и взяты в кавычки.

$$c_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2, I_3) = k_i + p_i (I_3 - 1) + 1/2 q_i (I_3 - 1)^2,$$

$$k_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \partial \hat{W} / \partial \hat{I}_i, \quad p_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \partial \chi_1 / \partial \hat{I}_i,$$

$$q_i(\hat{I}_1, \hat{I}_2) = \partial \chi_2 / \partial \hat{I}_i \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

$\mathbf{g}$  – единичный тензор. Для слабосжимаемого материала  $\alpha$  – малая величина, которая в настоящем исследовании используется как малый параметр при построении решения задачи для почти несжимаемых материалов.

Тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}$  дается соотношением  $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T$  и равен

$$\mathbf{T} = 2 \sigma I_3(\mathbf{F}) \mathbf{g} + 2 \left( \frac{\Phi}{I_3(\mathbf{F})} - I_3(\mathbf{F}) \mathbf{g} \right) c_1 +$$

$$+ 2 \left( \frac{I_1(\mathbf{C})}{I_3(\mathbf{F})} \Phi - \frac{\Phi^2}{I_3(\mathbf{F})} - 2 I_3(\mathbf{F}) \mathbf{g} \right) c_2, \quad (3)$$

где  $\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  – мера деформаций Фингера.

Функционал, соответствующий слабой постановке краевой задачи нелинейной упругости с уравнением состояния (2), предложен и исследован в работе [1] и имеет вид

$$He = \int_{V_0} \left[ \sigma (I_3 - 1) - \frac{\alpha}{2} (\sigma - \chi_1)^2 + \hat{W}(\hat{I}_1, \hat{I}_2) - \right.$$

$$\left. - \rho_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \right] dV_0 - \int_{S_p^0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS_p^0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{K}$  – векторы перемещений и объемных сил,  $\rho_0$  – плотность материала в недеформированной конфигурации  $V_0$ ,  $S_p^0$  – часть поверхности  $V_0$  - объема, на которой приложены силы  $\mathbf{p}$ . Варьируемые параметры функционала –  $\sigma$  и  $\mathbf{u}$ .

### 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

#### 3.1. Полый цилиндр из слабосжимаемого материала под внутренним давлением при осевом смещении и закручивании внешней поверхности

Бесконечно длинный полый цилиндр внутреннего радиуса  $r_a$  и внешнего –  $r_b$  нагружен в текущей конфигурации внутренним давлением  $p_n$  при нулевых осевых и круговых смещениях внутренней поверхности. Внешняя поверхность цилиндра фиксирована в радиальном направлении и сдвигается в осевом направлении на величину  $w^*$  и круговом – на угол  $\psi^*$ . Положение точки тела в начальной конфигурации определяется в базисе цилиндрической системы координат радиус-вектором  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_1 + z \mathbf{e}_3$  и в текущей конфигурации, в соответствие с описанной выше кинематикой, радиус-вектором

$$\mathbf{R} = R(r) (\cos \omega \mathbf{i} + \sin \omega \mathbf{j}) + (z + w(r)) \mathbf{k} =$$

$$= R(r) \cos \psi(r) \mathbf{e}_1 + R(r) \sin \psi(r) \mathbf{e}_2 + (z + w(r)) \mathbf{e}_3,$$

$$\omega = \varphi + \psi(r), \quad \psi(r_a) = 0, \quad w(r_a) = 0, \quad R(r_b) = r_b,$$

$$\psi(r_b) = \psi^*, \quad w(r_b) = w^*. \quad (5)$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_1,$$

градиент деформации  $\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T$ , где  $\nabla$  – оператор Гамильтона в начальной конфигурации, запишется в виде

$$\mathbf{F} = (R' \cos \psi - R \psi' \sin \psi) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{R}{r} \cos \psi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 +$$

$$+ (R' \sin \psi + R \psi' \cos \psi) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + w' \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \frac{R}{r} \sin \psi \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad (6)$$

а тензор меры деформаций Коши-Грина  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  в виде

$$\mathbf{C} = (R'^2 + R^2 \psi'^2 + w'^2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 +$$

$$+ \frac{R^2 \psi'}{r} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) + w' (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1). \quad (7)$$

Из соотношений (6), (7) следует, что

$$I_1(\mathbf{C}) = 1 + R'^2 + R^2 \psi'^2 + w'^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2,$$

$$I_2(\mathbf{C}) = R'^2 + R^2 \psi'^2 + \left( \frac{R w'}{r} \right)^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 + \left( \frac{R' R}{r} \right)^2,$$

$$I_3(\mathbf{C}) = I_3^2(\mathbf{F}) = \left( \frac{R' R}{r} \right)^2;$$

$$\hat{I}_1 = 2 + R'^2 + R^2 \psi'^2 + w'^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \left( \frac{R' R}{r} \right)^2,$$

$$\hat{I}_2 = 2 + R'^2 + R^2 \psi'^2 + \left( \frac{R w'}{r} \right)^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 - \left( \frac{R' R}{r} \right)^2. \quad (8)$$

Компоненты тензора, обратного градиенту места,  $\mathbf{F}^{-1}$ , определяются известным соотношением

$$F^{ij} = \frac{1}{\tilde{F}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial F_{ji}}, \quad \tilde{F} = \det F_{ij} = \frac{R' R}{r}$$

и  $F_{ij}$  – компоненты тензора  $\mathbf{F}$ . Тогда

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\cos \psi}{R'} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left( \frac{r \cos \psi}{R} - \frac{r \psi' \sin \psi}{R'} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \frac{\sin \psi}{R'} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \left( \frac{r \sin \psi}{R} - \frac{r \psi' \cos \psi}{R'} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 -$$

$$- \frac{w' \cos \psi}{R'} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \frac{w' \sin \psi}{R'} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2, \quad (9)$$

и тензор, обратный тензору меры деформаций Коши-Грина  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}$  запишется как

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{R'^2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left( \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^2 \psi'^2}{R'^2} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \left( 1 + \frac{w'^2}{R'^2} \right) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \frac{r \psi'}{R'^2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) -$$

$$- \frac{w'}{R'^2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) + \frac{r \psi' w'}{R'^2} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2). \quad (10)$$

Получим необходимые уравнения равновесия и естественные граничные условия основываясь на функ-

ционале (4). Учитывая, что  $\hat{I}_1$ ,  $\hat{I}_2$  и  $I_3$  являются функциями  $r$ ,  $R$ ,  $R'$ ,  $w'$  и  $\psi'$  и что давление  $p_n$  приложено ко внутренней поверхности в текущей конфигурации, этот функционал может быть переписан как

$$He(\sigma, \mathbf{u}) = 2\pi \int_{r_a}^{r_b} F(r, \sigma, R, R', w', \psi') dr - 2\pi r_a \left( I_3(\mathbf{F}) \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \right) \Big|_{r=r_a} p_n (R(r_a) - r_a),$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя единичная нормаль к недеформированной поверхности и

$$F(r, \sigma, R, R', w', \psi') = r \left( \sigma (I_3 - 1) - \frac{\alpha_0 (\sigma - p_1 (\hat{I}_1 - 3) - p_2 (\hat{I}_2 - 3))^2}{2(1 + Q_1 (\hat{I}_1 - 3) + Q_2 (\hat{I}_2 - 3))} + k_1 (\hat{I}_1 - 3) + k_2 (\hat{I}_2 - 3) \right). \quad (11)$$

Уравнения Эйлера для этого функционала

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial w'} = C_w, \quad \frac{\partial F}{\partial \psi'} = C_\psi, \quad \frac{\partial F}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial R'} = 0, \quad (12)$$

где  $C_w$  и  $C_\psi$  – константы, условие трансверсальности

$$\frac{\partial F}{\partial R'} \Big|_{r=r_a} = -2\pi r_a \left( I_3(\mathbf{F}) \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \right) \Big|_{r=r_a} p_n \quad (13)$$

и граничные условия (см. (5))

$$\psi(r_a) = 0, \quad w(r_a) = 0, \quad R(r_b) = r_b, \quad \psi(r_b) = \psi^*, \quad w(r_b) = w^*. \quad (14)$$

Решения этих уравнений будем искать в виде рядов по малому параметру  $\alpha_0$ , сохраняя только линейные слагаемые в силу слабой сжимаемости материала:

$$R(r) = R_0(r) + \alpha_0 \rho(r), \quad w(r) = w_0(r) + \alpha_0 \xi(r), \quad \psi(r) = \psi_0(r) + \alpha_0 \zeta(r), \quad \sigma = \sigma_0 + \alpha_0 \eta(r), \quad (15)$$

где члены, содержащие  $\alpha_0$  в нулевой степени, есть решение задачи для несжимаемого материала. Тогда из соотношений (8)-(11) получаем, что

$$\left( \frac{R'_0 R_0}{r} \right)^2 = 1 \quad (16)$$

является коэффициентом при  $\alpha_0$  в нулевой степени для первого уравнения Эйлера в соотношениях (12), в то время, как

$$2 \left( \rho' + \frac{\rho}{r} \right) - \frac{\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2)}{r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2)} = 0 \quad (17)$$

является коэффициентом при  $\alpha_0$  в первой степени для того же самого уравнения Эйлера. В последнем выражении

$$P = p_1 + p_2, \quad Q = Q_1 + Q_2,$$

$$C = \frac{w^*}{\ln(r_b/r_a)}, \quad D = 2\psi^* \frac{r_a^2 r_b^2}{r_b^2 - r_a^2}. \quad (18)$$

Для уравнения (16) из соотношений (14) выписываем граничное условие  $R_0(r_b) = r_b$ , с учетом которого уравнение (16) имеет решение  $R_0(r) = r$ . Для уравнения (17) граничным условием будет

$$\rho(r_b) = 0. \quad (19)$$

Аналогично, второе уравнение Эйлера (12) распадается на следующие два уравнения с граничными условиями, соответствующими (14):

$$r w'_0 = C_{w1}, \quad w_0(r_a) = 0, \quad w_0(r_b) = w^*,$$

решением которого будет

$$w_0(r) = C \ln \left( \frac{r}{r_a} \right), \quad (20)$$

и

$$G_0 r \xi' + 4k_2 C \frac{\rho}{r} + 2CP \frac{\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2)}{r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2)} + CQ \frac{(\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2))^2}{(r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2))^2} = C_{w2}, \quad \xi(r_a) = \xi(r_b) = 0. \quad (21)$$

Третье уравнение Эйлера, учитывая условия (14), также приводит к двум крайним задачам:

$$G_0 r^3 \psi'_0 = C_{\psi1}, \quad \psi_0(r_a) = 0, \quad \psi_0(r_b) = \psi^*,$$

решением которой будет

$$\psi_0(r) = \psi^* \left( \frac{r_b}{r} \right)^2 \frac{r^2 - r_a^2}{r_b^2 - r_a^2}, \quad (22)$$

и

$$G_0 r^3 \zeta' + 2G_0 D \frac{\rho}{r} + 2DP \frac{\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2)}{r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2)} + DQ \frac{(\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2))^2}{(r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2))^2} = C_{\psi2}, \quad \zeta(r_a) = \zeta(r_b) = 0. \quad (23)$$

Наконец, еще две крайние задачи вытекают из последнего уравнения Эйлера и условия (13):

$$\sigma'_0 = \frac{k_2 C^2}{r^3} + \frac{G_0 D^2}{2r^5}, \quad 2\sigma_0 \Big|_{r=r_a} = -p_n,$$

$$2r\eta' + 2r\sigma_0 \left( \rho' + \frac{\rho}{r} \right)' + 2r\sigma'_0 \left( \rho' + \frac{\rho}{r} \right) + 2\rho\sigma_0 - 2k_2 \left( \frac{C^2 \rho}{r^3} + \frac{2C\xi'}{r} \right) - G_0 \left( \frac{D^2 \rho}{r^5} + \frac{2D\zeta'}{r} \right) - 2 \left( \frac{D^2 P}{r^4} + p_2 \left( \frac{C}{r} \right)^2 \right) \frac{\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2)}{r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2)} - \left( \frac{D^2 Q}{r^4} + Q_2 \left( \frac{C}{r} \right)^2 \right) \frac{(\sigma_0 r^4 - P(C^2 r^2 + D^2))^2}{(r^4 + Q(C^2 r^2 + D^2))^2} = 0, \quad 2(r\eta + (2\sigma_0 - G_0)\rho + r\sigma_0 \rho') \Big|_{r=r_a} = -\rho p_n \Big|_{r=r_a}, \quad (24)$$

где

$$\sigma_0(r) = -\frac{p_n}{2} + \frac{k_2 C^2}{2} \frac{r^2 - r_a^2}{r_a^2 r^2} + \frac{G_0 D^2}{8} \frac{r^4 - r_a^4}{r_a^4 r^4} \quad (25)$$

– решение первого уравнения (24). Таким образом, функции  $R_0$ ,  $w_0$ ,  $\psi_0$  и  $\sigma_0$ , являясь решениями задачи для несжимаемого материала, определяются соотношениями (20), (22) и (25). Теперь последовательно решая уравнения (17) (с условием (19)), (21), (23) и (24), находим функции  $\rho$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  и  $\eta$ , выражения для которых здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Вспоминая, что единичная нормаль ко внешней поверхности цилиндра в текущей конфигурации определяется соотношением

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}^{-1}}{\sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{e}_1}},$$

и учитывая выражения (9), (10), получаем

$$\mathbf{N} = \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2. \quad (26)$$

Тогда, вводя ортонормальный базис

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= \cos \psi \mathbf{e}_1 + \sin \psi \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_2^* &= -\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3^* &= \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (27)$$

который есть базис  $\mathbf{e}_i$ , повернутый на угол  $\psi$ , тензор Фингера можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi &= R'^2 \mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_1^* + \left( (R \psi')^2 + \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right) \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_2^* + \\ &+ (1 + w'^2) \mathbf{e}_3^* \mathbf{e}_3^* + R R' \psi' (\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_1^*) + R' w' (\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_3^* + \\ &+ \mathbf{e}_3^* \mathbf{e}_1^*) + R \psi' w' (\mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_3^* + \mathbf{e}_3^* \mathbf{e}_2^*) \end{aligned}$$

и компоненты тензора истинных напряжений (3) определяются в базисе  $\mathbf{e}_i^*$  следующими выражениями:

$$\begin{aligned} T^{11} &= 2 \frac{R'}{r} \left( \frac{r^2 - R^2}{R} (c_1 + c_2) + \sigma R \right), \\ T^{22} &= 2 \frac{R}{r} \left( \frac{1 - R'^2 + r^2 \psi'^2}{R'} (c_1 + c_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{w'^2}{R'} c_2 + \sigma R' \right), \\ T^{33} &= 2 \sigma \frac{R' R}{r} + 2 \left( \frac{r(1 + w'^2)}{R' R} - \frac{R' R}{r} \right) c_1 + \\ &+ 2 \left( \frac{r R'}{R} + \frac{r R \psi'^2}{R'} + \frac{R(1 + w'^2)}{r R'} - 2 \frac{R' R}{r} \right) c_2, \\ T^{12} &= 2 r \psi' (c_1 + c_2), \\ T^{13} &= 2 \frac{r w'}{R} c_1 + 2 \frac{R w'}{r} c_2, \\ T^{23} &= 2 \frac{r w' \psi'}{R'} c_1. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (15) в эти выражения и разлагая полученное в ряд по  $\alpha_0$  в окрестности нуля, сохраняя, в силу слабой сжимаемости материала, только линейные слагаемые, получаем окончательно:

$$T^{11} = 2 \sigma_0 + 2 \alpha_0 \left( (\sigma_0 - G_0) \frac{\rho}{r} + \eta + \rho' \sigma_0 \right),$$

$$\begin{aligned} T^{22} &= 2 \sigma_0 + 2 k_2 \frac{C^2}{r^2} + G_0 \frac{D^2}{r^4} + 2 \alpha_0 (\eta + \sigma_0 \gamma - G_0 \rho' - \\ &- k_2 \frac{C^2}{r^2} (\rho' - \frac{\rho}{r}) + 2 k_2 \frac{C}{r} \xi + 2 \frac{C^2}{r^2} \gamma (p_2 + Q_2 \gamma) + \\ &+ G_0 \frac{D}{r} (\zeta' - \frac{D}{2 r^3} (\rho' - \frac{\rho}{r})) + 2 \frac{D^2}{r^4} \gamma (P + Q \gamma)), \\ T^{33} &= 2 \sigma_0 + G_0 w_0'^2 + 2 k_2 r^2 \psi_0'^2 + \\ &+ \alpha_0 \left( (2(\sigma_0 - G_0) - w_0'^2 (G_0 + 4(P + Q \gamma))) \gamma + \right. \\ &+ 4 k_2 w_0'^2 \frac{\rho}{r} + 2 \eta + 2 G_0 w_0' \xi' + 2 r^2 \psi_0' \left( 2 k_2 (\zeta' + \frac{\rho}{r}) - \right. \\ &\quad \left. - (k_2 - 2 \psi_0' (p_2 + Q_2 \gamma)) \gamma \right)), \\ T^{12} &= \frac{G_0 D}{r^2} + \alpha_0 \left( G_0 r \zeta' + \frac{4 D}{r^2} \gamma (P + Q \gamma) \right), \\ T^{13} &= \frac{G_0 C}{r} + \\ &+ \alpha_0 \left( G_0 \xi' - 2(k_1 - k_2) \frac{C}{r^2} \rho + 4 \frac{C}{r} \gamma (P + Q \gamma) \right), \\ T^{23} &= 2 k_1 \frac{C D}{r^3} + 2 \alpha_0 \left( k_1 \left( C \zeta' + \frac{D}{r^2} \xi' - \frac{C D}{r^3} \rho' \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \gamma \frac{C D}{r^3} (p_1 + Q_1 \gamma) \right), \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\gamma = \rho' + \rho/r$ . Отметим, что перемещение  $w_0(r)$  (20), которое является решением нулевого порядка по отношению к  $\alpha_0$ , и напряжение  $T^{13} = G_0 C/r$  (28), соответствующее этому перемещению для несжимаемого материала, известные решения, также как и соотношения (22) для  $\psi_0(r)$  и (28) для  $T^{12} = G_0 D/r^2$ .

**Примечание.** Если граничные условия, заданные в рассмотренной задаче на внутренней поверхности, определить для внешней, а заданные для внешней перенести на внутреннюю, то все полученные результаты останутся в силе при замене  $r_a$  на  $r_b$  и наоборот.

### 3.2. О корректности полученных решений

Из соотношений Коши  $\mathbf{p} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}$  для внутренней поверхности цилиндра, для которой  $\mathbf{N} = -\mathbf{e}_1^*$  (26), (27), следует, что

$$\mathbf{p}|_{r=r_a} = -T^{11} \mathbf{e}_1^* - T^{12} \mathbf{e}_2^* - T^{13} \mathbf{e}_3^*|_{r=r_a}.$$

Принимая во внимание последнее выражение (24) и решение (25), можно легко показать, что  $T^{11}|_{r=r_a} = -p_n$ . Тогда нормальная компонента вектора  $\mathbf{p}$  в соотношении Коши равна приложенному в текущей конфигурации давлению  $p_n$ , что подтверждает правильность полученного решения.

Другой проверкой корректности решения является редукция результатов, полученных в рамках теории конечных деформаций, на малые и сравнение их с решениями, построенными непосредственно в рамках теории малых деформаций.

Редукция полученных решений на малые деформации основана на следующей подходе. Малое различие между начальной конфигурацией, определяемой ради-

ус-вектором  $\mathbf{r}$ , и актуальной с радиус-вектором  $\mathbf{R}$  формализуется соотношением

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{u},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений и  $\varepsilon$  – малый положительный параметр. Для слабосжимаемых материалов эта формализация может быть переписана в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \varepsilon (\mathbf{u}_0 + \alpha_0 \mathbf{u}_1),$$

где  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{u}_0$  определяет несжимаемый материал в текущей конфигурации, мало отличающейся от начальной. Второе слагаемое в скобках дает малую поправку к перемещению  $\mathbf{u}_0$ , учитывающую слабую сжимаемость материала.

В рамках предположения о малости деформаций и слабой сжимаемости материала, все полученные в предыдущем разделе выражения необходимо привести к виду  $A = A^* + \varepsilon (A_0 + \alpha_0 A_1)$ , где  $A^*$  – значение  $A$  в недеформированной конфигурации,  $A_0$  – приращение  $A$  для несжимаемого материала, а  $A_1$  – поправка на слабую сжимаемость. Тогда в соотношениях (15)  $R(r) = r + \varepsilon (u_0(r) + \alpha_0 u_1(r))$  и, так как  $R_0(r) = r$ , то  $u_0(r) = 0$  и  $u_1(r) = \rho(r)$ .  $w(r)$  и  $\psi(r)$  из этих выражений определяются как

$$w(r) = \varepsilon (w_0(r) + \alpha_0 \xi(r)), \quad \psi(r) = \varepsilon (\psi_0(r) + \alpha_0 \zeta(r)).$$

Подстановка полученных величин в соотношения (8) дает  $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = 3$ . Тогда получаем, что  $\chi_1 = 0$ ,  $\chi_2 = \chi_{20}$  и  $\sigma = \chi_{20} (I_3(\mathbf{C}) - 1)$ , а также, что  $I_3(\mathbf{C}) = 1 + 2\varepsilon\alpha_0 (u'_1 + u_1/r)$ . Отсюда можно заключить, что  $\sigma = \varepsilon (\sigma_0 + \alpha_0 \eta)$ . Поэтому во всех выражениях предыдущего раздела к величинам  $\rho$ ,  $w_0$ ,  $w^*$ ,  $\xi$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi^*$ ,  $\zeta$ ,  $\sigma_0$ ,  $p_n$  и  $\eta$  добавляется малый параметр  $\varepsilon$  и сохраняются только члены первого порядка малости по этому параметру. Эта процедура оставляет без изменения выражения для  $w_0$  (20) и  $\psi_0$  (22), тогда как соотношение (25) преобразуется, с учетом зависимостей (18) для  $C$  и  $D$ , к виду  $\sigma_0 = -p_n/2$ . Уравнение (17) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho) = \frac{\sigma_0}{2}$$

и будет иметь решение

$$\rho(r) = \frac{p_n}{8} \frac{r_b^2 - r^2}{r}. \quad (29)$$

Уравнения (21) и (23) переписутся в виде

$$G_0 r \xi' = C_{w2}, \quad G_0 r^3 \zeta' = C_{\psi 2}$$

и решения их при заданных граничных условиях будут  $\xi = \zeta = 0$ , а уравнение и граничные условия (24) примут вид

$$2r \eta' = 0, \quad 2(r \eta - G_0 \rho)|_{r=r_a} = -\rho p_n|_{r=r_a},$$

откуда

$$\eta = G_0 \frac{p_n}{8} \frac{r_b^2 - r_a^2}{r_a^2},$$

Подставляя эти величины в соотношения для составляющих тензора напряжений (28), получаем окончательно:

$$\begin{aligned} T^{11} &= -p_n + \alpha_0 G_0 \frac{p_n}{4} \left( \frac{r_b}{r_a} \right)^2 \frac{r^2 - r_a^2}{r^2}, \\ T^{22} &= -p_n + \alpha_0 G_0 \frac{p_n}{4} \left( \frac{r_b}{r_a} \right)^2 \frac{r^2 + r_a^2}{r^2}, \\ T^{33} &= -p_n + \alpha_0 G_0 \frac{p_n}{4} \frac{r_a^2 + r_b^2}{r_a^2}, \\ T^{12} &= 2 G_0 \frac{r_a^2 r_b^2 \psi^*}{r^2 (r_b^2 - r_a^2)}, \\ T^{13} &= G_0 \frac{w^*}{r \ln(r_b/r_a)}, \quad T^{23} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь параметр  $\varepsilon$  опущен.

Решим теперь эту же задачу сразу в рамках линейной теории упругости. Уравнения равновесия для осесимметричной задачи и обобщенной плоской деформации имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T^{11}) - \frac{T^{22}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial T^{12}}{\partial r} + 2 \frac{T^{12}}{r} &= 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T^{13}) = 0. \end{aligned}$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений в законе Гука запишутся как:

$$\begin{aligned} T^{11} &= 4 \chi_{20} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) - 2 G_0 \frac{u}{r}, \\ T^{22} &= 4 \chi_{20} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) - 2 G_0 \frac{\partial u}{\partial r}, \\ T^{33} &= (4 \chi_{20} - 2 G_0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u), \\ T^{12} &= G_0 r \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad T^{13} = G_0 \frac{\partial w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (31)$$

Подстановка последних двух зависимостей в соответствующие уравнения равновесия дает решения (20) и (22) для граничных условий (5). Первое уравнение равновесия с учетом выражений для  $T^{11}$  и  $T^{22}$  имеет решение

$$u = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r},$$

где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий

$$u|_{r=r_b} = 0, \quad T^{11}|_{r=r_a} = -p_n.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{r_a^2 p_n}{4 \chi_{20} r_a^2 + G_0 (r_b^2 - r_a^2)} = \\ &= -\frac{\alpha_0 r_a^2 p_n}{4 r_a^2 + \alpha_0 G_0 (r_b^2 - r_a^2)} = \\ &= -\alpha_0 \frac{p_n}{4} + \alpha_0^2 G_0 p_n \frac{r_b^2 - r_a^2}{16 r_a^2}, \end{aligned}$$

$$C_2 = \alpha_0 \frac{r_b^2 p_n}{8} - \alpha_0^2 G_0 p_n \left( \frac{r_b}{r_a} \right)^2 \frac{r_b^2 - r_a^2}{32}$$

и тогда

$$u = \alpha_0 \frac{p_n}{8} \frac{r_b^2 - r^2}{r} - \alpha_0^2 G_0 \frac{p_n}{32} \frac{r_b^2 - r_a^2}{r_a^2} \frac{r_b^2 - r^2}{r}.$$

Чтобы иметь корректные соотношения для составляющих тензора напряжений, содержащих линейные  $\alpha_0$ , мы сохранили в выражениях для  $C_1$  и  $C_2$  и члены второго порядка малости. Сравнение левых и правых частей  $u = \alpha_0 \rho$ , где  $\rho$  определяется соотношением (29), показывает, что редукция решения нелинейной задачи на малые деформации и решение, полученное непосредственно в рамках линейной теории упругости, совпадают. Подставляя полученные выражения для перемещений в выражения для напряжений (31), снова получаем соотношения (30).

### 3.3. Численные результаты

Решение задачи получено как функция заданных осевого  $w^*$  и окружного  $\psi^*$  перемещений внешней поверхности и внутреннего давления  $p_n$  в актуальной конфигурации. Рассматривался длинный полый цилиндр внутреннего радиуса  $r_a = 10 \text{ mm}$  и внешнего  $r_b = 30 \text{ mm}$  при следующих значениях констант материала, взятых из работы [2]:

$$G_0 = 2(k_1 + k_2) = 1.0 \text{ МПа}, P = p_1 + p_2 = 1.495 G_0,$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{q_1 + q_2}{\chi_{20}} = 0.87597,$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\chi_{20}} = 0.13_{10} - 2 \text{ МПа}^{-1}.$$

Отметим, что для рассматриваемой задачи относительное изменение объема

$$\Delta = I_3(\mathbf{F}) - 1 = \frac{R' R}{r} - 1 = \alpha_0 \left( \rho' + \frac{\rho}{r} \right) = \alpha_0 \gamma \quad (32)$$

не должно превышать 2%, так как параметры материала определялись только в этой области. Из всех компонент тензора истинных напряжений сдвиговые силы  $T^{12}$  и  $T^{13}$  наиболее информативны для целей настоящей работы. На рис. 1a приведены осевые усилия сдвига  $p_z$ , рассчитанные по соотношениям (28) для внешней поверхности цилиндра ( $p_z = T^{13}$ ), как функции истинного внутреннего давления  $p_n$  при различных осевых смещениях  $w^*$  (кривые 1 – 5 соответствуют смещениям 2 mm, 4 mm, 6 mm, 8 mm и 10 mm) и углах закручивания  $\psi^*$  внешней поверхности. Так как кривые непрерывно и слабо зависят от угла закручивания, они представлены только для предельных значений этого угла ( $\psi^* = 0^0$  – сплошные линии,  $\psi^* = 20^0$  – пунктирные). Кроме того, так как  $T^{13}$  зависит также и от  $k_2$ , были вычислены эти усилия для различных значений  $k_2$  ( $0 \leq k_2 \leq G_0/2$ ) при фиксированном модуле сдвига  $G_0 = 1.0 \text{ МПа}$ . Расчеты показали слабую зависимость  $T^{13}$  от  $k_2$ . Поэтому на рис. 1a приведены результаты при  $k_2 = 0$ . Как видно из этого рисунка при фиксированном осевом смещении внешней поверхности цилиндра  $w^*$  и внутреннем давлении  $p_n$ , изменяющемся от нуля до 60 МПа, уси-

лие сдвига  $p_z$  должно быть увеличено в 1.5 - 1.7 раза, чтобы поддерживать заданное перемещение  $w^*$ . И наоборот, если фиксирована сила  $p_z$ , приложенная к внешней поверхности, осевое перемещение  $w^* = 10 \text{ mm}$  при  $p_n = 0$  (см. кривую 5, рис. 1a) уменьшается до 6 mm при  $p_n = 55 \text{ МПа}$ . Другими словами, внешняя поверхность цилиндра, стянутая в осевом направлении фиксированной силой, натягивается обратно при приложении внутреннего давления.

Все вышесказанное справедливо и для рис. 1b, на котором представлена зависимость окружного усилия сдвига  $p_\psi$  от приложенного внутреннего давления  $p_n$  при различных углах закручивания  $\psi^*$  (кривые 1 – 5 соответствуют углам  $4^0, 8^0, 12^0, 16^0$  и  $20^0$ ) и предельных осевых смещениях  $w^*$  внешней поверхности ( $w^* = 0 \text{ mm}$  □ сплошные линии,  $w^* = 10 \text{ mm}$  □ пунктирные линии). Здесь при заданном фиксированном угле закручивания  $\psi^*$  и внешнем давлении  $p_n$ , возрастающем от нуля до 60 МПа, касательное усилие  $p_\psi$  должно быть увеличено в 1.5 - 1.8 раз, чтобы поддерживать заданный угол закрутки  $\psi^*$ . И наоборот, если фиксированы приложенные ко внешней поверхности силы  $p_\psi$ , угол закрутки  $\psi^* = 20^0$  при  $p_n = 0$  (см. кривую 5, рис. 1b) уменьшается до  $12^0$  при  $p_n = 50 \text{ МПа}$ . Другими словами, внешняя поверхность цилиндра, закрученная фиксированной силой, раскручивается при приложении внутреннего давления.

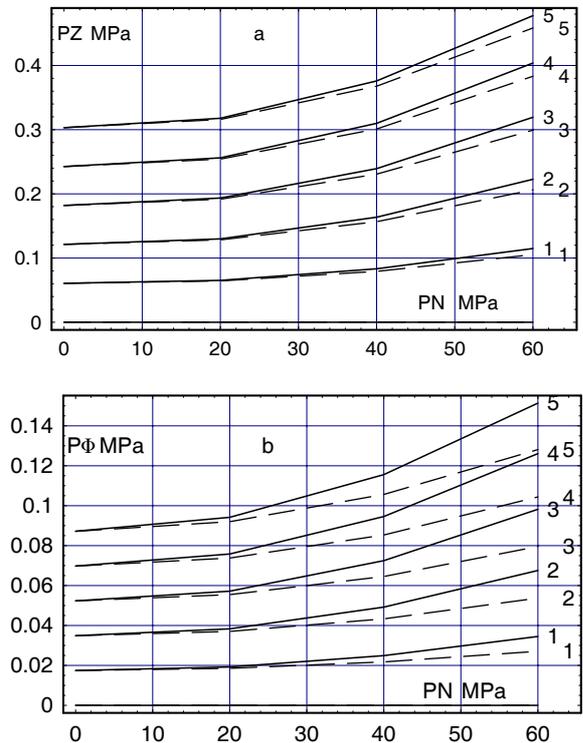


Рис 1. Зависимость осевых (а) и окружных (б) усилий сдвига при различных осевых смещениях и углах закручивания внешней поверхности

Эти эффекты проявляются только при учете слабой сжимаемости материала. Если последний считается несжимаемым, т.е. для него  $\alpha_0 = 0$ , то, как следует из соотношений (28),  $T^{12}$  и  $T^{13}$  не зависят от давления. При этом условии  $T^{12}$  зависит только от кручения, а

$T^{13}$  – только от осевого сдвига (см. (18)), т.е. в этих составляющих тензора напряжений нет перекрестного влияния кручения и осевого сдвига, проявляющегося в слабосжимаемом материале. Известный эффект Пойнтинга при  $\alpha_0 = 0$  остается в силе:  $T^{33}$  зависит от кручения.

Эти эффекты объясняются значительным возрастанием «модуля сдвига» при сжатии (относительном изменении объема), что может быть принято и учтено только моделью слабосжимаемого материала и проиллюстрировано на задаче с высоким гидростатическим давлением.

**Замечание.** Главный момент сил  $p_\psi$  и главный вектор сил  $p_z$  на внешней и внутренней поверхностях должны быть равны и противоположны по знаку. Результаты выполненных расчетов удовлетворяют этим требованиям.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для реальных слабосжимаемых упругих материалов при конечных деформациях теоретически обнаружен эффект уменьшения перемещения в направлении сдвига при наложении давления и фиксированных усилий сдвига. Эффект продемонстрирован на задаче о поведении длинного полого цилиндра, жесткая внешняя оболочка которого смещается в осевом и

круговом направлениях по отношению к внутренней поверхности, нагруженной давлением. Оказалось, что внешняя поверхность цилиндра, закрученная в азимутальном и сдвинутая в осевом направлениях фиксированными силами, раскручивается и натягивается обратно при приложении внутреннего давления. Этот эффект значительно сильнее известного эффекта Пойнтинга, проявляется только при учете слабой сжимаемости материала и объясняется значительным возрастанием «модуля сдвига» при сжатии (относительном изменении объема).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов / Мошев В.В., Свистков А.Л., Гаришин О.К. и др. Под ред. В.В.Мошева. □ Екатеринбург: УрО РАН. 1997. 508 с. Гл.8.: Роговой А.А. Модель слабосжимаемого и несжимаемого упругого тела при конечных деформациях. С.375-442.
2. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С.64-77.
3. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости эластомеров. Осесимметричная задача. Аналитическое решение // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С.25-37.