

# ДВУМЕРНЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Д.В. Котов, С.Т. Суржиков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва,  
119526, проспект Вернадского 101-1

### Аннотация

В работе рассматривается метод решения двумерных уравнений Навье – Стокса на треугольных неструктурированных сетках, основанный на схеме Годунова.

Приводятся результаты тестовых решений для различных режимов течения (как дозвуковых, так и сверхзвуковых) в канале с выпуклостью. Проводится сравнение результатов расчета течения рассматриваемым методом с решениями, полученными на структурированных сетках.

### TWO-DIMENSIONAL CALCULATION OF INVISCID FLOW ON UNSTRUCTURED GRIDS.

The work considers Godunov scheme based method for solution of 2-D Navier – Stokes equations on triangular unstructured grids. The results of calculation of some test problems are presented: inviscid flow in the channel with bump and viscous flow in channel. These results are compared with the calculations on structured grids.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время разработка численных методов газодинамических расчетов в областях сложной формы имеет большое практическое и научное значение. При этих расчетах очень важную роль играет выбор расчетной сетки. В то время как в областях простой формы можно обойтись одноблочной структурированной сеткой, в сложных областях приходится строить многоблочные сетки, для чего необходимо разбить область на простые подобласти, построить в них одноблочные сетки и сопрячь их друг с другом. Автоматически выполнить этот процесс для действительно любой геометрии на сегодняшний день практически не возможно. Одним из методов решения этой проблемы является использование неструктурированных сеток.

Характерной особенностью неструктурированных сеток является произвольное расположение узлов сетки в физической области. Произвольность расположения узлов понимается в том смысле, что отсутствуют выраженные сеточные направления, и нет структуры сетки, подобной регулярным сеткам. Число ячеек, содержащих каждый конкретный узел, может изменяться от узла к узлу. В двумерном случае узлы сетки объединяются в многоугольники, а в трехмерном – в многогранники. Как правило, на плоскости используются треугольные и четырехугольные ячейки, а в пространстве – тетраэдры и призмы. Основное преимущество неструктурированных сеток перед регулярными состоит в большей гибкости при дискретизации физической области сложной формы, а также в возможности полной автоматизации их построения. Для неструктурированных сеток сравнительно легко реализуются локальные сгущения и адаптация сетки к решению. Для дискретизации уравнений Навье – Стокса применяются метод конечных элементов и метод конечного объема.

Для решения задачи методом конечного объема можно воспользоваться схемами, аналогичными схеме «крест» на структурированных сетках [6]. Практическая сложность реализации этих схем заключается в необходимости вводить не обусловленную физически искусственную вязкость для подавления неустойчивости схемы. Чтобы получить хорошо физически обусловленную разностную схему, можно, следуя идее

С.К.Годунова [3], использовать автомодельное решение задачи распада разрыва (задачи Римана).

Недостаток этого подхода состоит в том, что для точного решения задачи Римана требуется трудоемкая итерационная процедура [4]. Однако на данный момент предложено множество методов приближенного решения задачи Римана (например [5]), что делает подход Годунова достаточно эффективным для решения задачи на неструктурированных сетках.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 2.1. Система уравнений

Рассматриваемая двумерная задача течения вязкого газа описывается уравнениями Навье – Стокса, имеющими вид

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad (1)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{pmatrix} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{yx} - q_x \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y \end{pmatrix} \mathbf{j},$$

где  $\mathbf{w}$  – столбец консервативных переменных,  $\mathbf{F}$  – вектор конвективного потока,  $\mathbf{G}$  – вектор вязкого потока,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $u, v$  – компоненты вектора скорости,  $e$  – полная энергия в единице объема,  $\tau$  – тензор вязких напряжений,  $q$  – тепловой поток.

Данная система замыкается уравнением состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1)U = (\gamma - 1) \left[ e - 0.5\rho(u^2 + v^2) \right].$$

Здесь  $U$  – внутренняя энергия в единице объема;  $\gamma = c_p/c_v$ ;  $c_p, c_v$  – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно.

Тензор вязких напряжений записывается в виде

$$\tau = \mu \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

где  $\mu$  – коэффициент вязкости, вычисляемый по формуле Сазерленда:

$$\mu = 1.458 \times 10^{-6} T^{1.5} \frac{1}{110.4 + T} \left( \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right).$$

Тепловой поток задается соотношением

$$q = -\lambda \nabla T = -\frac{\lambda}{R_M} \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right),$$

где  $T$  – температура;  $R_M$  – газовая постоянная, отнесенная к молярной массе газа;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, определяемый по коэффициенту вязкости через число Прандтля:

$$\lambda = \mu \frac{\gamma R_M}{0.72(\gamma - 1)} \left( \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К}} \right).$$

### 2.2. Граничные условия.

Рассматриваются следующие граничные условия:

а) Фиксированный поток:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0; \quad u = V_0 \cos \alpha; \quad v = V_0 \sin \alpha; \quad \frac{\partial e}{\partial n} = 0.$$

Здесь  $V_0$  – скорость входного потока;  $\vec{n}$  – нормаль к границе;  $\alpha$  – угол атаки. Данное условие используется при втекании газа в расчетную область.

б) Прилипание:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0; \quad u = 0; \quad v = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial n} = 0.$$

Данное условие применяется вдоль границы со стенкой.

в) Постоянный поток:

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial n} = 0.$$

Данное условие используется при вытекании газа из расчетной области.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД.

#### 3.1. Аппроксимация по пространству.

В соответствии с идеологией метода контрольного объема вся расчетная физическая область разбивается на конечное число непересекающихся элементов, в данном случае – треугольников.

Уравнения (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Проинтегрируем систему (2) по  $i$ -му треугольнику ABC:

$$\frac{\partial \bar{w}_i(t)}{\partial t} = -\frac{1}{a_i} [q_{AB}(t) + q_{BC}(t) + q_{CA}(t)], \quad (3)$$

где  $a_i$  – площадь треугольника ABC,  $\bar{w}_i$  – осредненное по треугольнику значение  $w$ ,  $q$  – поток через грань треугольника, определяемый по формуле:

$$q_{AB}(t) = \int_{AB} (f dy - g dx).$$

В первом приближении этот интеграл равен

$$q_{AB} \approx f[w(x_0, y_0)] \Delta y_{AB} - g[w(x_0, y_0)] \Delta x_{AB},$$

где  $x_0, y_0$  – координаты середины отрезка AB.

Таким образом, для определения приращения переменных  $w$  нужно рассчитать потоки массы, импульса и энергии через грани треугольника. Для этого, в соответствии с идеей С.К.Годунова [3], используется автомодельное решение задачи распада разрыва (задача Римана) на границе между двумя соседними треугольниками. Причем решается одномерная задача Римана, входными параметрами в которой служат проекции скоростей на нормаль к грани, а касательные скорости переносятся непосредственно на грань с той стороны, откуда течет поток.

В данной работе используется первый порядок пространственной аппроксимации, то есть при вычислении потоков на грани считается, что переменные в ячейки постоянны. Для получения более высокого порядка точности решения можно использовать линейное распределение параметров в ячейке, однако для сохранения монотонности численной схемы необходимо использовать ограничители этого распределения. Один из наиболее удачных алгоритмов такого «восстановления» параметров подробно описан в [2].

#### 3.2. Вычисление производных.

Для расчета вязких членов в (1) необходимо вычислить производные скорости и температуры по пространству. Для этой цели используется усреднение производной по некоторому контрольному объему  $\Omega$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle_{\Omega} = \frac{1}{S} \iint_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \frac{1}{S} \oint F dy.$$

Выбирать контрольный объем можно по-разному, но не все схемы при этом остаются устойчивыми. В данной работе в качестве объема для усреднения производной на границе между двумя треугольниками выбираются шестиугольники, построенные по средним линиям соответствующих треугольников (рис. 1).

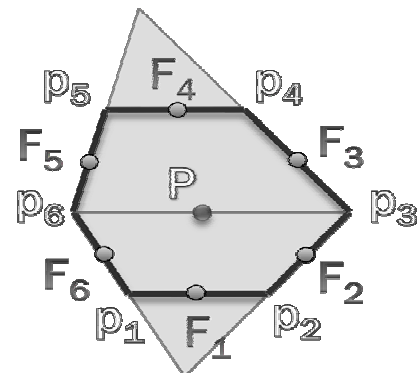


Рис. 1. К вычислению производных по пространству

Производная в точке P определяется по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_P \approx \frac{\sum F_i (p_{i+1} - p_i)}{0.75(S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2})},$$

где  $S_{\Delta 1}, S_{\Delta 2}$  – площади треугольников. При этом значения  $F_1$  и  $F_4$  (на рис.1) берутся равными значениям внутри соответствующих треугольников, а значения в остальных точках определяются интерполяцией значений в близлежащих ячейках по методу наименьших квадратов. Например, для определения значений  $F_5$  и  $F_6$  интерполяция происходит на основе значений треугольников, содержащих вершину  $p_6$ .

**3.2. Реализация граничных условий.**

Для численной реализации граничных условий используются фиктивные ячейки. Центры этих ячеек ( $i$ ) помещаются симметрично к центрам пограничных ячеек ( $j$ ) относительно границы расчетной области. Тогда, например, условие прилипания выглядит следующим образом:

$$\rho_i = \rho_j; \quad u_i = -u_j; \quad v_i = -v_j; \quad e_i = e_j.$$

**3.3. Аппроксимация по времени.**

Система уравнений (3) представляет собой систему ОДУ 1-го порядка. В данной работе она решается с помощью двухстадийного метода Рунге – Кутты:

$$w^{(1)} = w^{(0)} + \Delta t R(w^{(0)}),$$

$$w^{(2)} = \frac{1}{2}(w^{(0)} + w^{(1)}) + \frac{\Delta t}{2} R(w^{(1)}),$$

где  $R$  – правая часть системы (3). Шаг по времени  $\Delta t$  выбирается следующим образом:

$$\Delta t = K \min \left( \frac{h_m}{\max_i c_i + \max_i v_i}, \frac{h_m^2}{2 \max_i (\mu/\rho)} \right),$$

где  $i$  – номер ячейки,  $h_m$  – минимальное расстояние между центрами ячеек,  $K$  – число Куранта,  $K < 1$ .

**4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.**

**4.1. Невязкое течение в канале с выпуклостью.**

В данной задаче рассматривается невязкое течение газа в канале с 10%-ой выпуклостью. Входной поток  $M = 1.6$  направлен параллельно стенкам канала. Использовалась однородная сетка из 10582 треугольников (рис. 2). Для сравнения использовались результаты расчетов, полученные при помощи пакета FLUENT, а также расчет на структурированной сетке, выполненный в [1]. Результаты этих расчетов представлены на рис. 3 – 5.

В целом результаты расчетов достаточно близки. Расхождение в точке  $X = 2.0$  можно объяснить различием в подробности расчетной сетки вблизи границы.

**4.2. Вязкое течение в канале.**

В данной задаче рассматривается вязкое течение газа в канале шириной 3,11 см. Стенки канала начинаются на расстоянии 1 см от входа в расчетную область. Параметры на входе: давление  $P = 78.37$  Па, температура  $T = 45$  К, число Маха  $M = 5$ .

На представленных ниже рисунках проводится сравнение расчетов на двух типах сеток: неструктурированная (рис. 6а) и «квазиструктурированная» (рис. 6б), то есть неструктурированная сетка, полученная из двух сеток: структурированной сетки вблизи границы и неструктурированной – вдали от границы расчетной области. На рис. 7 представлено сравнение расчетов на этих сетках. Видно, что на «квазиструктурированной» сетки результаты получаются менее размытыми.

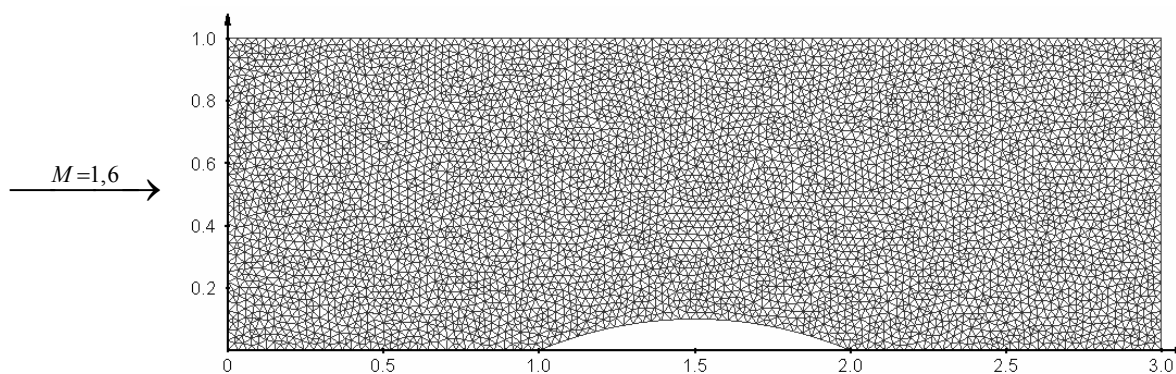


Рис. 2. Расчетная сетка

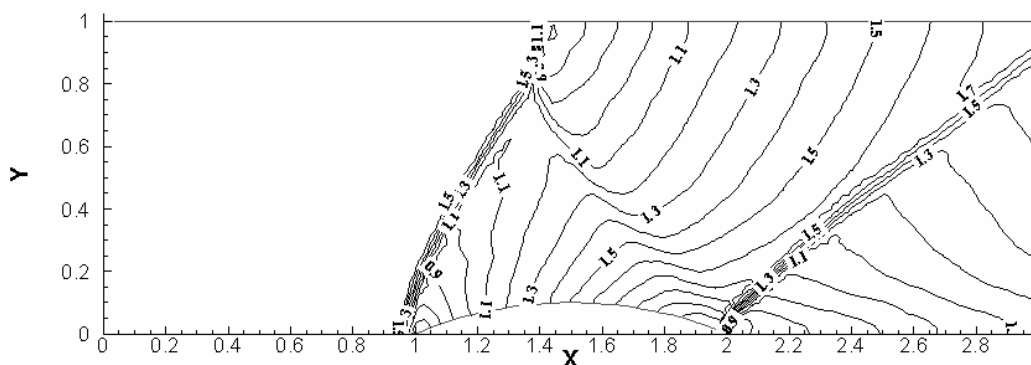


Рис. 3. Распределение числа Маха по расчетной области. На входе  $M = 1.6$

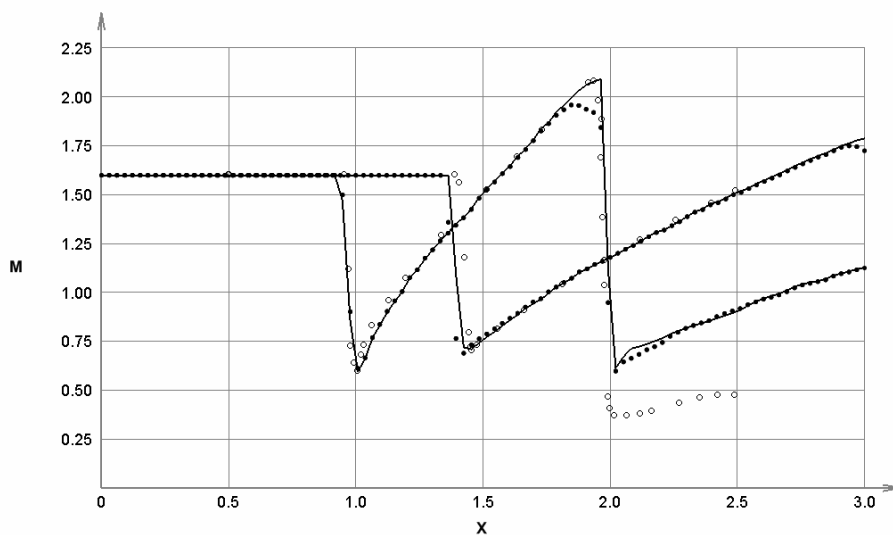


Рис. 4. Число Маха на стенках: темные точки – FLUENT, светлые точки – статья [1], сплошная линия – расчеты, проведенные в данной работе. На входе  $M = 1.6$

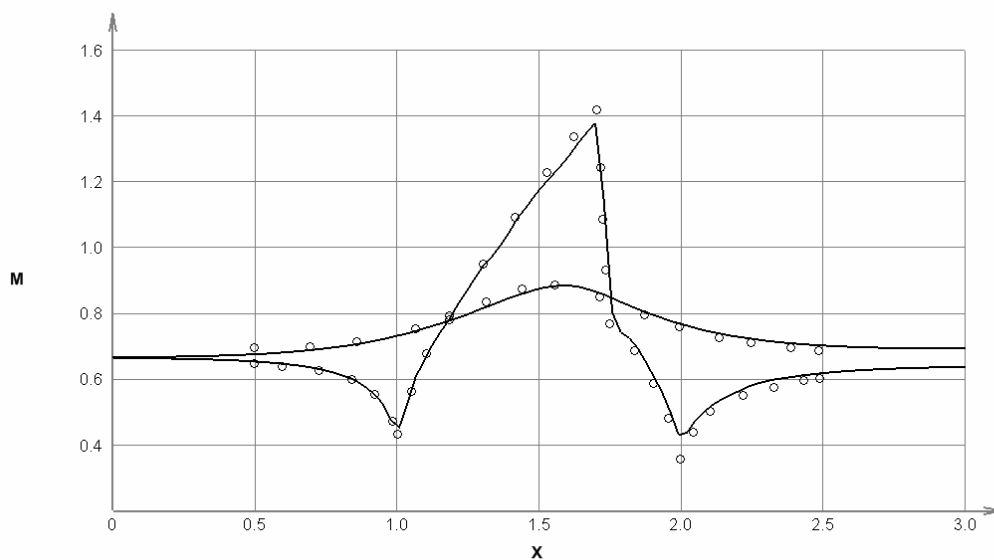


Рис. 5. Число Маха на стенках: точки – статья [1], сплошная линия – расчеты, проведенные в данной работе. На входе  $M = 0.675$

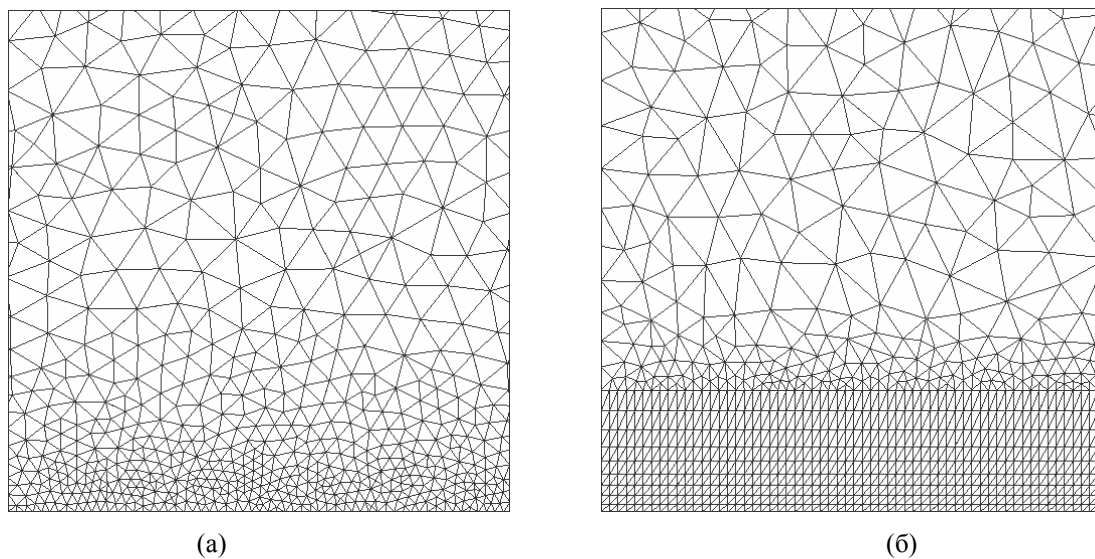


Рис. 6. Два типа расчетных сеток: а – обычная неструктурированная, б – «квазиструктурированная» (представлены фрагменты сеток)



Рис. 7. Распределение числа Маха по расчетной области. Сравнение расчетов на двух типах сеток

На рис. 8 представлено распределение давления по стенке канала. Здесь особенно хорошо заметна гладкость решения, полученного при расчете на «квазиструктурированной» сетке. Также на этом рисунке представлены результаты расчетов [7], проведенные на гораздо более подробной сетке. На этом же графике изображено поведение давления по асимптотической теории. С точки зрения теории в точке, где начинается стенка ( $x=1$  см), давление бесконечно. Это означает, что, строго говоря, уравнения Навье–Стокса здесь неприменимы. В конечно-разностном представлении это выражается как скачок давления вблизи указанной точки на некоторую большую величину, зависящую, прежде всего от подробности сетки.

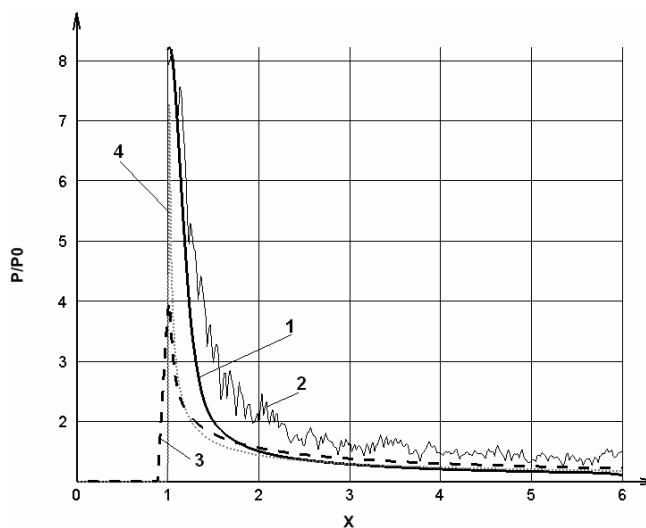


Рис. 8. Давление на стенке канала: 1 – расчет на «квазиструктурированной» сетке, 2 – на обычной неструктурированной, 3 – на структурированной [7], 4 – асимптотическая теория

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На неструктурированной сетке проведены расчеты обтекания выпуклой преграды в канале невязкой жидкостью. Результаты расчетов с достаточной точностью соответствуют расчетам на структурированной сетке, приведённым в [1].

На неструктурированной сетке проведены расчеты течения в канале вязкой жидкостью. Проведено сравнение с расчетами на структурированной сетке [7].

Проведено исследование влияния структуры неструктурированной сетки на гладкость решения. Показано, что для получения гладкого решения может оказаться полезным строить «квазиструктурированную» сетку вблизи твёрдой поверхности.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 07-01-00133 (разработка пространственной модели движения химически реагирующего газа), а также в рамках Программы фундаментальных исследований РАН (создание моделей физико-химической кинетики высокотемпературных газовых потоков) и Программы министерства образования и науки Российской Федерации РНПВШ 2.1.1/4693 (создание гибридных радиационно-столкновительных моделей аэрофизики).

Авторы благодарят В.В. Кузенова и И.А. Крюкова за плодотворные обсуждения и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Issa R.I., Javareshkian M.H. Pressure-Based Compressible Calculation Method Utilizing Total Variation Diminishing Schemes, AIAA paper, Vol. 36, No. 9, p.1652.
2. Боровиков С.Н., Иванов И.Э., Крюков И.А. «Моделирование пространственных течений идеального газа с использованием тетраэдральных сеток», Матем. моделирование, 18:8 (2006), 37–48.
3. Годунов С.К., «Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики», Матем. сб., 47(89):3 (1959), 271–306.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П., Численное решение многомерных задач газовой динамики, Наука, М., 1976.
5. Сафронов А.В. Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах для вектора потока, Материалы XVII Школы-семинара «Аэродинамика летательных аппаратов», ЦАГИ, 2006.
6. Сакович В.С., Сорokin А.М. Применение неструктурированных сеток для расчета вязкого обтекания многоэлементных профилей, Выч. мат. и мат. физ., Т. 37, № 10, 1997.
7. Суржиков С.Т., Шенг Дж. С. Вязкое взаимодействие на плоской пластине с поверхностным разрядом в магнитном поле, ТВТ, 2005, Т. 43, № 1, с. 21–31.