

## РАСЧЕТ ВЫРОЖДЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППРОКСИМАЦИИ ХАССЕЛЬМАННА

**В.А. Фрост**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва,  
119526, проспект Вернадского 101-1*

### Аннотация

Работа посвящена изучению возможностей замыкания уравнений для корреляционных функций изотропных турбулентных полей скаляра и скорости. Используются аппроксимации третьих моментов, полученные эвристически [1] и по методу моментов [2]. Приводятся соответствующие уравнения для спектров. Расчет спектров и корреляционных функций проводится в широком диапазоне турбулентных чисел Рейнольдса ( $100 \div \infty$ ). Полученные результаты используются для определения параметров законов типа Колмогорова ( $k^{-n}$ ).

### THE CALCULATION OF DECAU OF ISOTROPIC TURBULENCE WITH USE OF HASSELMANN'S APPROXIMATION

Work is devoted studying of possibilities of closing of the equations for correlation functions of isotropic turbulent fields of a scalar and velocity. The approximations of the third moments received heuristically [1] and on a method of the moments [2] are used. The corresponding equations for spectra are resulted. Calculation of spectra and correlation functions is spent in a wide range of turbulent numbers of Reynolds ( $100 \div \infty$ ). The received results are used for definition of parameters of laws of type of Kolmogorov ( $k^{-n}$ ).

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованиям, связанным с созданием метода расчета турбулентных реагирующих потоков. Предполагается создать метод, основанный на использовании уравнений для средних, моментов различного порядка и плотностей распределения вероятностей. Основным объектом применения метода является описание турбулентного горения заранее перемешанных газовых смесей, относительно скорости горения которых известно, что они зависят от конкретных значений молекулярных коэффициентов переноса: диффузии, температуропроводности и вязкости, если производится расчеты параметров турбулентного поля скорости. Для учета этого обстоятельства модель также должна включать в себя молекулярные коэффициенты переноса. Заметного успеха в этом направлении удалось достичь при работе по проекту ИНАС #00-353, когда было предложено в основу модели положить уравнение для корреляционной функции скалярного поля и предложить некоторый алгоритм его замыкания, соответствующий нашим представлениям о механизме влияния турбулентности на химические процессы. В последствии для иллюстрации возможностей такого подхода были просчитаны некоторые примеры: вырождение скалярного поля в однородном и изотропном поле турбулентности, формирование зоны реакции в плоском канале и параметры переноса примеси в канале с параллельными стенками. В последнем случае, используя экспериментальные данные о турбулентности [3], удалось получить распределения по ширине канала турбулентного числа Шмидта и коэффициента диффузии, а также получить зависимость турбулентного числа Шервуда (диффузионный аналог числа Нуссельта) от числа Шмидта. Во всех этих расчетах никаких произвольно выбираемых

коэффициентов не использовалось. При подтверждении статистической достоверности метода, что необходимо при использовании приближений для корреляционных функций (теорема Хинчина), удалось показать, что одномерный спектр остается положительным только, если исходные спектры монотонны. Доказать сохранение монотонности в течение всего времени развития скалярного поля не удалось. Настоящее исследование возникло, как желание проверить выполнение теоремы Хинчина численно, для чего надо было показать, что рассчитываемые одномерные спектры в процессе расчета остаются монотонными. Для этого были проведены две серии расчетов: расчеты одномерного спектра скалярного поля в условиях однородной изотропной турбулентности и, после обнаружения некоторых особенностей этих спектров, расчеты корреляционной функции поля скорости для чего использовалось уравнение Кармана – Ховарта, в котором третьи моменты были представлены с использованием аппроксимации для них, предложенной в [1]. Случилось так, что когда мы искали метод замыкания уравнения для корреляционной функции скаляра, мы не знали о существовании работы Хассельманна [1], в которой было предложен метод, приводящий точно к той же форме аппроксимации третьих моментов, что была найдена нами для скалярного поля. Отличие заключается только в способах обоснования подходов и в форме используемого выражения для характерного времени в выражении для коэффициента вихревой диффузии у нас и турбулентной вязкости в [1]. Объединение двух подходов позволяет решать задачи турбулентных реагирующих потоков при одновременном расчете изменений параметров турбулентного поля скорости. В качестве первого примера выбрана задача о вырождении однородной изотропной турбулентности.

## 2. РАСЧЕТ СПЕКТРОВ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ СКАЛЯРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КФС

### 2.1. Исходные уравнения

В условиях однородной и изотропной турбулентности уравнение Корсина с использованием аппроксимации для третьих моментов, предложенной в [2, 3], записанное в форме, предложенной в [1], будет

$$\frac{\partial}{\partial t} R(r, t) = \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ r^2 \left[ \tau_c (B_{LL}(0) - B_{LL}(r)) + D_m \right] \frac{\partial}{\partial r_i} R(r, t) \right\} \quad (1)$$

Здесь  $R(r, t)$  – корреляционная функция скалярного поля;  $r$  и  $t$  – соответственно пространственный и временной аргументы корреляционной функции;  $B_{LL}(r)$  – корреляционная функция продольной компоненты поля скорости и  $\tau_c$  – некоторое характерное время. Несмотря на то, что в силу изотропии все вторые моменты зависят только от одной пространственной переменной, 3D характер полей позволяет определить преобразование Фурье корреляционных функций по-разному: одномерное преобразование:

$$F_1(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr} B(r) dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kr) B(r) dr \quad (2)$$

и 3D преобразование:

$$F(k) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint e^{-i(k \cdot r)} B(r) dr_1 dr_2 dr_3 = \frac{1}{2\pi^2 k} \int_0^{\infty} \sin(kr) r B(r) dr \quad (3)$$

Соответственно преобразование уравнения (1) также может быть записано в двух формах:

$$\frac{d}{dt} E(k, t) = -k^2 E(k, t) + \frac{1}{2\pi} k \int_{-\infty}^{\infty} (k - k') E_t(k', t) E(k - k', t) dk' \quad (4)$$

для одномерного спектра и

$$\frac{d}{dt} E(k) = -k^2 E(k) + 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} (k \cdot k') \times E \left[ \sqrt{k^2 + k'^2 - 2kk' \cos(\theta, t)} \right] E_t(k', t) k'^2 \sin(\theta) dk' d\theta$$

для 3D спектра. Здесь  $E(k) = E(k, t)$  и  $E_t(k)$  представляют собой соответствующие спектры; индекс  $t$  определяет спектр функции  $B_{LL}$ . Формулы (4) и (5) приведены только для тех частей уравнения, которые относятся к аппроксимации третьих моментов, причем величина  $\tau_c$  положена равной единице. Из сравнения формул (4) и (5) ясно, что вычисления по первой из них существенно проще. Поэтому вычисления в первой части работы проводились по уравнению (4), что соответствовало бесконечно большому значению числа  $Re$ . При необходимости 3D спектр вычислялся, используя соотношение:

$$F(k) = -\frac{1}{2\pi k} \frac{d}{dk} F_1(k) \quad (5)$$

### 2.2. Условия проведения расчетов

В качестве начальных данных для спектров выбирались простейшие экспоненциальные зависимости:

$$E_c(k, 0) = \sqrt{\pi} \exp(-k^2/4) \text{ для спектра скаляра и}$$

$$E_t(k) = 2\sqrt{\pi} \exp(-k^2) \text{ для спектра } B_{LL}(r),$$

относительно которого предполагается независимость от времени. Оба эти спектра соответствовали экспоненциальным корреляционным функциям, равным единице в нуле и отличающимся только скоростью убывания при увеличении  $r$ . Для вычисления использовалась видоизмененная форма уравнения (4):

$$\frac{d}{dt} E(k, t) = -k^2 E(k) + \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{k_r} k(k - k') E(k - k') E_t(k') dk' + \int_0^{k_r} k(k + k') E(k + k') E_t(k') dk' \right) \quad (6)$$

Здесь величина  $k_r$  – конечное значение интервала, на котором происходит вычисление спектра.

Расчет потребовал более 40 часов на компьютере AMD64 2ГГц, что связано с необходимостью использования достаточно мелких сеток для вычисления интегральных членов правой части уравнения

### 2.3. Результаты расчетов

Фактически был рассчитан один режим  $Re = \infty$ . После выбора параметров расчетной схемы: дискретности сетки и шага по времени был выполнен расчет до безразмерного времени  $t=1$  (штрихпунктирная кривая на рис. 1). Обнаруженный участок в районе  $k=1$  имел наклон, соответствующий известному закону  $E(k) \sim k^{-5/3}$ , что изменило направленность исследований.

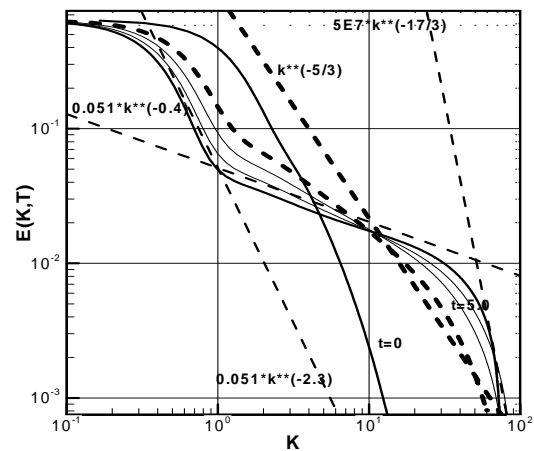


Рис.1. Изменение по времени одномерного скалярного спектра при  $Re = \infty$

Казалось, что предлагаемая модель позволяющая получить закономерности инерциального равновесного режима в процессе существенного изменения спек-

тра во времени, представляет значительный интерес. В действительности этого не произошло. Продолжение расчетов до времени  $t = 5.0$  (линия, изображенная более толстой) показало, что это совпадение было случайным. При временах больших  $t = 1$  произошло расщепление на два участка:  $E(k) \sim k^{-2}$  при  $k < 1$  и  $E(k) \sim k^{-0.4}$  при больших  $k$ .

Возникает вопрос о поведении спектра поля скорости, изучению которого посвящено значительное количество исследований. Для нас эта задача упрощается тем, что в [1] предложена аппроксимация для третьих моментов поля скорости, которая приводит к уравнению для соответствующей корреляционной функции (уравнению Кармана – Ховарта) полностью аналогичному уравнению (1). Отличие заключается только в определении характерных времен, которые естественно отличаются для полей скаляра и скорости, но и тем, что в модели [1] предполагается зависимость этого времени от величины  $r$ . В нашей модели характерные времена вычисляются по методу моментов. Естественно, что при этом зависимость от величины  $r$  исчезает, что допустимо, так как основная задача это определение диссипации. Вычисленное нами характерное время совпадает со значением, вычисленным в [1] для значения  $r = 0$ .

### 3. РАСЧЕТ ВЫРОЖДЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ КАРМАНА – ХОВАРТА

#### 3.1. Постановка задачи

Объектом расчета удобно выбрать вырождение однородной изотропной турбулентности, что очень близко к выше рассмотренному примеру и позволяет использовать разнообразные известные результаты для сравнения.

Безразмерная форма уравнения Кармана – Ховарта в форме [1] будет

$$\frac{\partial f(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^4 \left[ T_u (f(0, \tau) - f(r, \tau)) + Re^{-1} \right] \frac{\partial}{\partial r} f(r, \tau) \right\}$$

Здесь  $Re$  число Рейнольдса:  $Re = \frac{L_0 u_0}{\nu}$ .

Безразмерное характерное время  $T_u = \tau_u u_0 / L_0$ , зависящее от размерного характерного времени, определяемого по методу моментов с использованием упрощенного уравнения для пульсации скорости:

$$\tau = \left( 9 \frac{\nu \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, \tau)|_{r=0}}{f(0, \tau)} + 3 \frac{C_N u}{L} \right)^{-1}$$

Входящее в это выражение величина  $C_N$  связана с коэффициентом турбулентной вязкости и определяется из кинематических соображений. Если считать, что вихрь за время своего существования проворачивается на четверть оборота, то  $C_N = 2/\pi$ , по соображениям [5] 0.53, в [1] приведены значения  $0.25 \div 0.37$  и из аппроксимации коэффициента турбулентной диффу-

зии  $D_T \approx 0.009 U D$  можно получить значение 0.2. В расчетах использовалось значение  $C_N = 0.25$ .

#### 3.2. Результаты расчетов

На рис. 2. приведено изменение по времени обратной величины турбулентной энергии (сплошная линия). Для сравнения приведены результаты, соответствующие теоретическим представлениям: пунктирная кривая  $\langle u'^2 \rangle \sim (t - t_0)^{-10/7}$ , что должно наблюдаться при постоянстве интеграла Лойцанского, и штрихпунктирная линия  $\langle u' \rangle \sim (t - t_0)^{-1}$ , что наблюдается на заключительном периоде вырождения.

На рис. 3. приведено изменение по времени обратной величины квадрата внутреннего масштаба поля скорости:  $\lambda^2 = f|_{r=0} (\partial^2 f / \partial r^2)^{-1}$  и для сравнения в тех же координатах зависимость  $\lambda \sim (t - t_0)^{2/7}$ , соответствующая случаю постоянства интеграла Лойцанского. При расчетах величина  $\int_0^\infty r^4 f dr$ , называемая интегралом Лойцанского, использовалась для контроля за вычислениями. Величина интеграла Лойцанского оставалась постоянной с точностью до долей процентов.

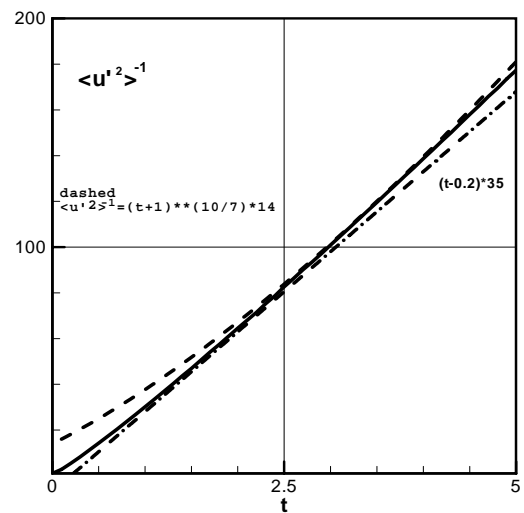


Рис. 2. Вырождение энергии турбулентности

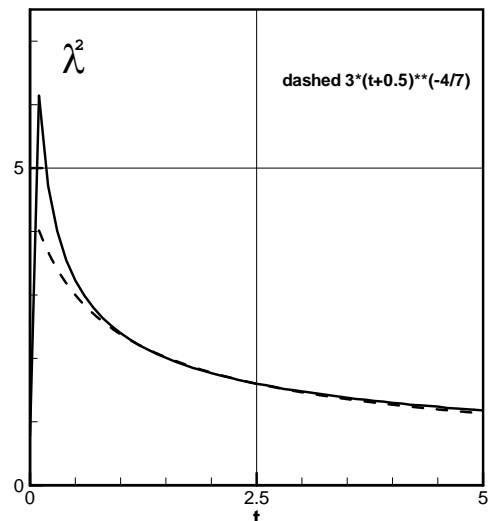


Рис.3. Изменение по времени обратной величины внутреннего масштаба поля скорости

На рис. 4. приведены одномерные спектры поля скорости, рассчитанные для различных моментов времени по полученным решениям уравнения Кармана–Ховарта. Легко заметить характерный переход энергии от малых волновых чисел в начальный момент к большим значениям впоследствии. Пунктирная кривая соответствует закону « $-5/3$ », характерному для инерциального интервала. Видно, что с течением времени наклон кривых, оставаясь все время больше чем  $-5/3$ , изменяется, приближаясь к желаемому, но к моменту окончания расчетов его не достигает. Продолжение же расчетов на большие времена оказалось не возможно из-за неустойчивости расчетной схемы вычисления спектров.

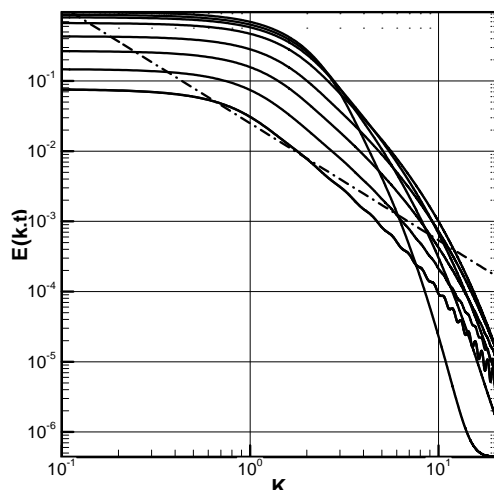


Рис. 4. Изменение по времени одномерного спектра поля скорости, рассчитанного как косинус-преобразование Фурье по результатам расчета корреляционной функции

Идея расчета корреляционной функции с последующим вычислением спектров не оправдала себя. Хотя вычисление корреляционных функций значительно проще, чем интегрирование уравнения для спектра, но вычисление преобразования Фурье для получения спектра приводит к значительным трудностям. В итоге не только не удалось провести расчет спектров при больших временах, но и получить участок спектра, в котором происходит основная диссипация.

### 3.3. Влияние молекулярной вязкости

Одной из целей исследования было создание метода расчета, в котором влияние молекулярных коэффициентов переноса учитывалось бы явно. Для проверки этого удобно использовать данные о внутреннем масштабе, так как влияние молекулярной вязкости на процесс затухания энергии проявляется слабо. Это объясняется тем, что с уменьшением вязкости уменьшается внутренний масштаб, что приводит к росту диссипации. Обратное, при росте вязкости внутренний масштаб растет. Эти процессы демпфируют влияние изменения вязкости.

Приведенные на рис. 5 результаты иллюстрируют влияние вязкости на внутреннее строение турбулентности. Изменение коэффициента молекулярной вязкости вдвое приводит к пропорциональному изменению квадрата внутреннего масштаба. Диссипация определяется произведением этого коэффициента на лапласиан от корреляционной функции при  $r=0$ , выра-

жающийся через вторую производную от корреляционной функции, которая используется при определении внутреннего масштаба. Поэтому полученная пропорциональность соответствует независимости скорости вырождения энергии от вязкости.

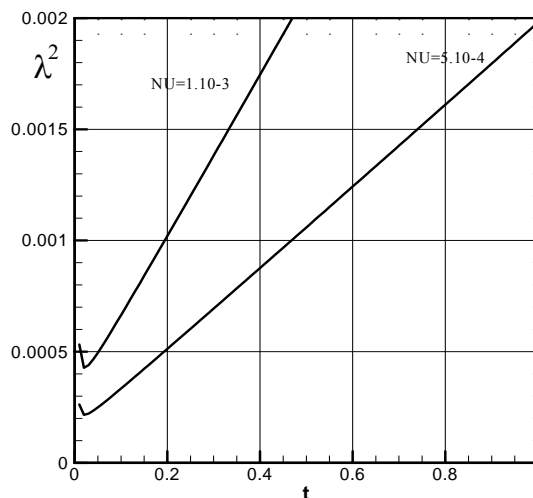


Рис. 5. Изменение по времени внутреннего масштаба, рассчитанного при различных числах Рейнольдса ( $NU = 3/Re$ )

Следует отметить, что все полученные в данной работе результаты не противоречат результатам теоретического анализа и экспериментальных исследований, приведенных в книгах [6,7]. В то же время для получения точного соответствия и выбора значения параметра  $C_N$  необходимы дополнительные исследования, в которых придется уточнить начальные условия и, возможно, учесть неизотропию начальной турбулентности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Численным интегрированием уравнений для одномерного спектра скалярного поля и уравнения Кармана–Ховарта для корреляционной функции поля скорости, замкнутых с использованием аппроксимации предложенной К.Хассельманом для поля скорости и нами для скалярного поля, показана статистическая достоверность приближения. Одномерные спектры полей оказались неотрицательными и монотонными, что соответствует требованиям теоремы Хинчина.

2. Расчет вырождения однородной и изотропной турбулентности, проведенный с использованием уравнения Кармана–Ховарта, показал, что изменение по времени интенсивности турбулентности и внутреннего масштаба не противоречит известным результатам.

3. Идентичность модели Хассельмана с нашей моделью позволяет рассматривать совместно поля скорости и скаляра, что, при условии учета переменности плотности, позволит описать влияние перестройки скалярного поля, в том числе, в результате действия химической реакции, на поле турбулентности.

4. Совместный анализ моделей для полей скорости и скаляра позволил уточнить метод определения характерного времени, используемого при описании скалярного поля, включив в него некоторый коэффициент ( $C_N$ ), зависящий от характеристик поля скорости.

**СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ**

Индексы:

 $C$  – величина относится к скалярному полю $t$  – тоже для поля скорости

Сокращения:

КФС – корреляционная функция скалярного поля.

 $B_{LL}(r)$  – корреляционная функция продольной компоненты турбулентной скорости $B(r)$  – обозначение для корреляционной функции, используемое при иллюстрации соотношений для спектров $C_N$  – коэффициент, входящий в аппроксимацию третьих моментов $D$  – диаметр канала, использующийся при расчете коэффициента турбулентной диффузии $D_T, D_m$  – коэффициенты турбулентной и молекулярной диффузии $E(k, t), E_t(k)$  – спектры скалярного поля и поля скорости соответственно $F(k), F_1(k)$  – обозначения для 3D и одномерного спектров, используемые при иллюстрации соотношений для спектров $k$  – волновое число $L_0 = \int_0^{\infty} f(r, 0) dr$  – начальное значение макромасштаба

турбулентного поля

 $L$  – текущее значение макромасштаба поля $f(r, t)$  – корреляционная функция поля скорости $NU = 3/Re$  – безразмерный коэффициент, появляющийся при анализе результатов расчета $r$  – величина, являющаяся единственным пространственным аргументом в однородном и изотропном случае $Re = L_0 u' / \nu$  – число Рейнольдса $t$  – время $\tau = t u_0 / L_0$  – безразмерное время $T_{u|c} = \tau_{u|c} u_0 / L_0$  – безразмерное характерное время, определяющее интенсивность действия третьих моментов на корреляционную функцию $U$  – величина средней скорости, используемая при расчете коэффициента турбулентной диффузии $u_0 = \sqrt{f(0, 0)}$  – начальное значение интенсивности

турбулентности

 $\lambda$  – микромасштаб (внутренний масштаб) турбулентного поля скорости $\nu$  – коэффициент динамической вязкости $\langle \dots \rangle$  – усреднение по реализациям или по времени для стационарных в среднем величин.**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. K. Hasselmann. Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz // Deutsche Hydrographische Zeitschrift. 1958. Band 11, Heft 5, S.207-217.
2. Красицкий В.П., Фрост В.А. Молекулярный перенос в турбулентных потоках // Изв. РАН, МЖГ. №2. 2007. С. 46-58.
3. Фрост В.А. Уравнение для корреляционной функции скаляра и расчет турбулентных чисел Шмидта и Шервуда. Препринт №856, М: ИПМех им. А.Ю. Ишлинского, РАН, 2008. 24 с.
4. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М: Мир, 1968. 176 с.
5. Амбарцумян Е.Н., Глушко Г.С., Крюков И.А. Вычисление тензора турбулентной вязкости в плоских течениях несжимаемой жидкости. Препринт №547, М: ИПМех им. А.Ю. Ишлинского, РАН, 1995. 24 с.
6. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М: ИЛ, 1955. 198 с.
7. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М: Наука., 1967. 720 с.