

# КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В МАТЕРИАЛАХ СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

А.А. Роговой

Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

## Аннотация

Используя подход, приводящий в рамках конечных деформаций к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими источниками, рассмотрены вопросы разделения неупругой энергии на тепловую и скрытую, связанную со структурными изменениями в материале. При этом, опираясь на экспериментальные данные, полагалось, что упругие свойства материала не зависят от изменений структуры, связанной с пластическими деформациями. Описана экспериментальная кривая доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло.

## FINITE DEFORMATIONS IN MATERIALS WITH STRUCTURAL CHANGE

The paper is concerned with the problem of dividing the inelastic energy into heat and latent energy connected with the structural changes in material. Here we use the approach, which in the framework of the finite deformations, leads to the heat conductivity equation, namely, to its part, which defines heat production by inelastic sources. Taking into account the experimental data it has been supposed that the elastic properties of material do not depend on the structural changes, caused by plastic deformations. The experimental curve, describing the fraction of plastic work transformed into heat, has been obtained.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т.п. и энергий их взаимодействия. На макроуровне это новое состояние структуры материала проявляется в изменении его упругих и пластических характеристик. В последние годы появились систематические экспериментальные исследования, позволяющие разделить затраченную пластическую работу на запасенную и тепловую части энергии. Для правильной интерпретации полученных в этих работах результатов необходим подход, приводящий к уравнению теплопроводности, а именно к той его части, которая связана с производством тепла неупругими источниками, в рамках конечных деформаций. Такой подход разработан в [1–4] и [6, 7], кратко изложен во втором разделе настоящей статьи и использован в третьем разделе для описания экспериментальных данных о части пластической работы, перешедшей в тепло.

### 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

#### 2.1. Кинематические соотношения

Придерживаясь подхода, изложенного в работах [2,3] и основанного на наложении малых деформаций на конечные, представим градиент места в виде мультипликации малых упругих, малых неупругих и конечных упруго-неупругих деформаций (рис. 1):

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{F}_* \quad (2.1)$$

Здесь упруго-неупругий градиент места  $\mathbf{F}_*$  переводит начальную конфигурацию, положение точки в которой определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , в первую промежуточную  $\kappa_1$ . Градиент  $\mathbf{f}_{IN}$  переводит конфигурацию  $\kappa_1$  во вторую тоже промежуточную конфигурацию  $\kappa_2$ . И, наконец, градиент  $\mathbf{f}_E$  переводит конфигурацию  $\kappa_2$  в текущую  $\kappa$  с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ . Причем, конфи-

гурации  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и текущая близки между собой, что формализуется выражениями

$$\mathbf{R}_{\kappa_2} = \mathbf{R}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{u}_{IN}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{u}_E,$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр (положительная величина), а  $\mathbf{u}_{IN}$  и  $\mathbf{u}_E$  – векторы неупругих и упругих перемещений, последовательно переводящие конфигурацию  $\kappa_1$  в  $\kappa_2$  и  $\kappa_2$  в текущую.

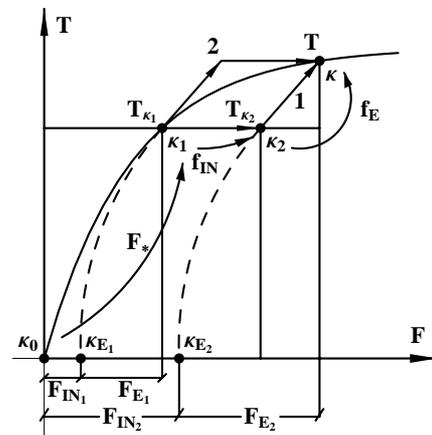


Рис. 1. Кинематика и соответствующие ей напряжения

С точностью до линейного представления по  $\varepsilon$  конфигурации  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  неразличимы:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} &= \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_E = \mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e} + \mathbf{d}) = \\ &= (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{g}$  – единичный тензор, а  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN}$  – полная малая деформация и полный малый поворот. В результате выражение (2.1) представляется в виде

$$\mathbf{F} = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN})] \cdot \mathbf{F}_*.$$

Это приближенное соотношение (при его получении сохранились только линейные относительно  $\varepsilon$  слагае-

мые) предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей легко сводится к точному эволюционному:

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{D}_E = \dot{\mathbf{e}}_E$ ,  $\mathbf{D}_{IN} = \dot{\mathbf{e}}_{IN}$  – деформации упругой и неупругой скоростей перемещений (совпадающие в данном случае со скоростями соответствующих деформаций),  $\mathbf{W}_E = \dot{\mathbf{d}}_E$ ,  $\mathbf{W}_{IN} = \dot{\mathbf{d}}_{IN}$  – упругий и неупругий тензоры вихря. Тензоры же  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  – любые достаточно гладкие тензорные функции и  $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}$ . В работе [2] показано, что, полагая  $\mathbf{P} = \mathbf{D}_E + \mathbf{W}_E$ , решением уравнения (2.2) будет тензор  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$ , где

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E)] \cdot \mathbf{F}_{E*}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F}_{IN} = [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot (\mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_{E*}] \cdot \mathbf{F}_{IN*}, \quad (2.4)$$

и градиенты места, помеченные «звездочкой», относятся к промежуточной конфигурации  $\kappa_1$ . Мера деформаций Коши – Грина записывается в виде  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_{IN}^T \cdot \mathbf{C}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$ , где  $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ . Эту меру, с учетом (2.3), (2.4), можно представить как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_*,$$

где  $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}$ ,  $\mathbf{C}_* = \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{F}_*$ , или как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + 2\varepsilon \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_0,$$

где  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN}$ ,  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{F}_0$ . Здесь, величины, помеченные «\*», относятся к промежуточной конфигурации  $\kappa_1$ , а величины, помеченные «0», к промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  (см. рис. 1). В соответствии с этими соотношениями можно получить предельным переходом, при стремлении промежуточной конфигурации  $\kappa_1$  к текущей ( $\mathbf{F}_* \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ ) и промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  к текущей ( $\mathbf{F}_0 \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_0 \rightarrow \mathbf{C}$ ), два приращения и две скорости изменения меры деформации  $\mathbf{C}$  [3]:

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_1} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (d\mathbf{e}_E + d\mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\kappa_1} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{e}}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN}) \cdot \mathbf{F}$$

относительно конфигурации  $\kappa_1$  (полное приращение и полная скорость изменения тензора  $\mathbf{C}$ ) и

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_2} = 2 \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\kappa_2} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}_E \cdot \mathbf{F} \quad (2.5)$$

относительно конфигурации  $\kappa_2$  (приращение и скорость изменения тензора  $\mathbf{C}$  за счет только упругих деформаций).

Чтобы учесть влияние температуры представим, аналогично работе [3], кинематику термо-упруго-неупругого процесса в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_\theta \cdot \mathbf{F}_*$ , где  $\mathbf{f}_\theta$  – градиент места, соответствующий малым температурным деформациям, и  $\mathbf{F}_*$  теперь термо-упруго-неупругий градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную. Причем градиенты места, определяемые малыми деформациями, все

коммутируют между собой. Поступая аналогично работе [3], получаем, что  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\theta$ , где  $\mathbf{F}_E$  и  $\mathbf{F}_{IN}$  представляются соотношениями (2.3) и (2.4), а

$$\mathbf{F}_\theta = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}) \cdot \mathbf{F}_{\theta*}. \quad (2.6)$$

Здесь  $\mathbf{h}_\theta$  – градиент температурных перемещений относительно конфигурации, соответствующей градиенту места  $\mathbf{F}_*$ . Полные малые деформации и повороты определяются теперь выражениями  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_\theta$ , где  $\mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{d}_\theta$  симметричная и кососимметричная части  $\mathbf{h}_\theta$ .

Соотношения (2.3), (2.4) и (2.6) удобно переписать в форме

$$\mathbf{F}_i = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{F}_{i*},$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{h}_E & i = E \\ \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{E*} & i = IN \\ \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*} & i = \theta \end{cases}$$

Используя полярные разложения для градиента места  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$  с любым индексом « $i$ » и представляя тензоры, составляющие полярные разложения, в виде

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(1)} \delta_i^{(1)}, \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(2)},$$

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)}, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)},$$

где  $U_i$  – собственные значения симметричного положительно определенного тензора  $\mathbf{U}$  (или  $\mathbf{V}$ ),  $\delta_i^{(1)}$  – собственные векторы тензора  $\mathbf{U}$ , единичные и ортогональные, а  $\delta_i^{(2)}$  – собственные векторы тензора  $\mathbf{V}$ , также единичные и ортогональные, в работе [4] рассмотрены изменения этих тензоров при слабых возмущениях. В частности, для изменения ортогонального тензора  $\mathbf{R}$  получено выражение

$$\mathbf{R} = \left\{ \mathbf{g} + \varepsilon \left[ \mathbf{P}_C - \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)} \right] \right\} \cdot \mathbf{R}_*, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{P}_S$  и  $\mathbf{P}_C$  – симметричная и кососимметричная части  $\mathbf{P}$ . Естественно, присутствующие в этих соотношениях тензоры чистой деформации, их собственные значения и векторы, ортогональный тензор относятся к неупругой или температурной кинематике, т.е. имеют индекс « $IN$ » или « $\theta$ ».

## 2.2. Определяющее уравнение

Как известно [5], в соответствии с теоремой Селерье – Рихтера или теоремой приведения Нолла, определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{R}^T,$$

где  $\mathbf{T}$  – тензор истинных напряжений;  $\tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U})$  – отклик материала на чистую деформацию. Это соотношение может быть представлено в нескольких эквивалентных формах (см. [6,7]), в частности, в форме

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{F}^T, \quad (2.8)$$

где  $J = I_3(\mathbf{F})$  – третий главный инвариант  $\mathbf{F}$ , и функция отклика материала, обозначенная здесь и в работах [6, 7]  $\tilde{\mathbf{g}}_6$ , связана с  $\tilde{\mathbf{g}}_1$  выражением  $\tilde{\mathbf{g}}_6 = J^{-1} \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{U}$ .

Будем полагать, что  $\tilde{\mathbf{g}}_6 = \tilde{\mathbf{g}}_6(\mathbf{C}, \theta, \mu_i)$ , где  $\theta$  – абсолютная температура, а  $\mu_i (i=1, 2, \dots, n)$  – скалярные параметры, определяемые структурными изменениями, происходящими в материале в процессе деформирования. Представляя каждую из входящих в (2.8) величин через ее значение в промежуточной конфигурации и приращение при переходе к близкой текущей ( $A = A_* + \varepsilon a$ ), переписываем соотношение (2.8), сохраняя только линейные по  $\varepsilon$  слагаемые, относительно промежуточной конфигурации (см. [2])

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \mathcal{G}(\mathbf{T}, \theta)_* + \varepsilon \zeta_i(\mathbf{T}, \mu_i)_* + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{6*}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E. \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}_E$  – полная термо-упруго-неупругая и чисто упругая малые деформации относительно промежуточной конфигурации;  $I_1$  – первый главный инвариант;  $\mathbf{h}$  – градиент относительно промежуточной конфигурации вектора малых перемещений, переводящего промежуточную конфигурацию в близкую текущую;  $\mathcal{G}$  и  $\zeta_i$  – приращения температуры и скалярных структурных параметров;  $\tilde{\mathbf{L}}_{6*}^{IV}$  – функция отклика материала (тензор четвертого ранга) на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации, конкретное выражение для которого приведено в [2] для слабосжимаемого материала;  $\mathbf{T}, \alpha \equiv \partial \mathbf{T} / \partial \alpha$  и «\*» в индексе указывает, что значение этой величины соответствует промежуточной конфигурации. Приближенное соотношение (2.9) предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей легко сводится к точному эволюционному

$$\mathbf{T}^{Tr} = \dot{\mathcal{G}}(\mathbf{T}, \theta) + \dot{\zeta}_i(\mathbf{T}, \mu_i) \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \quad (2.10)$$

с автоматически вытекающей объективной производной Трусделла. Учитывая, что  $\mathbf{e}_E = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{IN} - \mathbf{e}_\theta$  или  $\dot{\mathbf{e}}_E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_{IN} - \dot{\mathbf{e}}_\theta$ , и выписывая свои определяющие соотношения для  $\mathbf{e}_{IN} (\dot{\mathbf{e}}_{IN})$  и  $\mathbf{e}_\theta (\dot{\mathbf{e}}_\theta)$ , замыкаем построение уравнений (2.9), (2.10).

В работе [2] введен функционал

$$W_1 = \int_0^t (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{D}_E d\tau. \quad (2.11)$$

Здесь второй (симметричный) тензор Пиолы – Кирхгофа  $\mathbf{P}_{II}$  представляется в виде

$$\mathbf{P}_{II} = 4 \int_0^t \left( \mathbf{F} \circ \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau, \quad (2.12)$$

где  $W$  – упругий потенциал, зависящий от меры упругих деформаций  $\mathbf{C}_E$ , с константами, зависящими от температуры  $\theta$  и структурных параметров  $\mu_i$ . Операция « $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}^{IV}$ » означает позиционное скалярное умножение слева тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  на третий базисный вектор тензора четвертого ранга  $\mathbf{B}^{IV}$ . Как

показано в [2], функционал (2.11), (2.12) производит определяющее уравнение (2.9).

### 2.3. Соотношения, вытекающие из термодинамики

Выпишем термодинамическое неравенство Клаузиуса – Дюгема

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{\theta} s) - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \theta \geq 0,$$

где  $\rho, \psi, s$  – плотность массы в текущей конфигурации, удельные (отнесенные к единице массы) свободная энергия и энтропия;  $\mathbf{q}$  – вектор теплового потока;  $\tilde{\nabla}$  – оператор Гамильтона в текущей конфигурации;  $\mathbf{D}$  – тензор полной деформации скорости перемещений. Из требований принципа объективности, аргументами у функции  $\psi$  могут быть только инвариантные величины, т.е. какая-либо инвариантная по отношению к жесткому вращению текущей конфигурации кинематическая величина, температура  $\theta$  и конечное число внутренних параметров  $\mu_i (i=1, 2, \dots, n)$  – объективных скалярных функций, характеризующих изменение внутренней структуры материала в процессе упруго-неупругого деформирования. В качестве кинематической величины выберем тензор  $\mathbf{C}_{k_2}$  (2.5) и представим свободную энергию  $\psi(\mathbf{C}_{k_2}, \mu_i, \theta)$  в виде (см. [3])

$$\psi(\mathbf{C}_{k_2}, \mu_i, \theta) = \psi_1(\mathbf{C}_{k_2}, \mu_i, \theta) + \psi_2(\theta) + \psi_3(\mu_i),$$

полагая, что  $\dot{\psi}_1 = 0$ , если  $\dot{\mathbf{C}}_{k_2} = 0$ ,  $\dot{\psi}_2 = 0$ , если  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ , где  $\theta_0$  – температура приведения в градусах Кельвина (обычно, это комнатная температура) и  $\dot{\psi}_3 = 0$ , если  $\dot{\mu}_i = 0$ . Первое условие говорит о том, что если нет изменения упругой деформации ( $\dot{\mathbf{e}}_E = \mathbf{D}_E = 0$ ), то и  $\psi_1$  не меняется. Этому условию удовлетворяет функционал (2.11), (2.12). Но он отнесен не к единичной массе, а к единичному недеформированному объему. Поэтому

$$\psi(\mathbf{C}_{k_2}, \mu_i, \theta) = \frac{W_1}{\rho_0} + \psi_2(\theta) + \psi_3(\mu_i),$$

где  $\rho_0$  – плотность массы в недеформированной конфигурации. В результате, построив локальное продолжение процесса [5] и связав  $\dot{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{D}_\theta$  с изменением температуры  $\dot{\theta}$  простейшим законом линейного температурного расширения  $\dot{\mathbf{e}}_\theta = \beta \dot{\theta} \mathbf{g}$ , где  $\beta$  – коэффициент линейного температурного расширения, который полагаем функцией только температуры, получаем определяющее соотношение

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T,$$

где  $\mathbf{P}_{II}$  дается выражением (2.12), соотношение для энтропии

$$s = \frac{J\beta}{\rho_0} I_1(\mathbf{T}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} - c_{T0} \ln \frac{\theta_0}{\theta} + \int_{\theta_0}^{\theta} \ln \frac{\theta}{\theta_1} c_{T1}(\theta_1) d\theta_1, \quad (2.13)$$

где  $c_{T0}$  и  $c_{T1}$  определяют теплоемкость при нулевом напряжении  $c_T = c_{T0} + \int_{\theta_0}^{\theta} c_{T1}(\theta_1) d\theta_1$  и, используя уравнение Фурье для теплового потока, термодинамическое неравенство

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \mu_i} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu_i} \right) \dot{\mu}_i \geq 0. \quad (2.14)$$

Из первого закона термодинамики имеем, с учетом (2.13), уравнение теплопроводности (см. [3])

$$c \dot{\theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \theta),$$

где теплоемкость

$$c = J^{-1} \rho_0 c_T + \theta \left[ (\beta_{,\theta} + 2\beta^2) I_1(\mathbf{T}) + \beta I_1(\mathbf{T}_{,\theta}) - J^{-1} \int_0^t J \mathbf{T}_{,\theta\theta} \cdot \mathbf{D}_E d\tau \right],$$

скорость производства тепла упругими источниками

$$\dot{Q}_E = \theta \left[ \mathbf{T}_{,\theta} - 2\beta \mathbf{T} - \beta (\mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{L}}_6^{\prime\prime}) \right] \cdot \mathbf{D}_E$$

и скорость производства тепла неупругими источниками и структурными изменениями в материале

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{IN} = & (1 - 2\beta\theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} + \\ & + \dot{\mu}_i \left[ J^{-1} \int_0^t J (\theta(t) \mathbf{T}_{,\theta\mu_i} - \mathbf{T}_{,\mu_i}) \cdot \mathbf{D}_E d\tau - \right. \\ & \left. - \beta \theta I_1(\mathbf{T}_{,\mu_i}) - J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu_i} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

#### 2.4. Ограничения, вытекающие из термодинамики

Все соотношения механики должны удовлетворять принципу объективности, т.е. быть материально независимыми от изменения систем отсчета, относительно которых рассматриваются движения. В уравнения термодинамики входят мощности  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E$ ,  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}$  и  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_\theta$ . В работе [3] показано, что без дополнительных ограничений эти скаляры зависят от выбора систем отсчета для описания неупругой и температурной кинематики. Объективность же всех соотношений будет выполняться, если градиенты места  $\mathbf{F}_{IN}$  и  $\mathbf{F}_\theta$  будут чистыми деформациями без вращений:  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN}$ ,  $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{U}_\theta = \mathbf{V}_\theta$ , т.е. если в полярных разложениях тензоров  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{R}_{IN} \cdot \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN} \cdot \mathbf{R}_{IN}$ , и  $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{U}_\theta = \mathbf{V}_\theta \cdot \mathbf{R}_\theta$  ортогональные тензоры  $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_\theta$  равны единичным  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{R}_\theta = \mathbf{g}$ . Последние условия определяют недостающую связь между  $\mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_{IN}$  и между  $\mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{d}_\theta$ . Недостающей она является в силу того, что определяющие уравнения известны только для малых неупругих и температурных деформаций (скоростей). В пластичности, например, это ассоциированный закон, в вязкости – дифференциальный закон  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = \mathbf{T}/\eta$ , где  $\eta$  – вязкость, в термоупругости – закон линейного температурного расширения. Для малых вращений (скоростей) подобного типа соотношений нет.

Учитывая сказанное выше, ортогональные тензоры  $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_\theta$  в полярных разложениях этих градиентов места должны быть единичными в любой момент времени. Отсюда следует, что в соотношении (2.7)  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* = \mathbf{g}$  и тогда

$$\mathbf{P}_C = \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_j^{(2)} \delta_j^{(2)}.$$

Представляя тензор  $\mathbf{P}_C$  в базисе  $\delta_i^{(2)}$ , приходим к уравнению

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_S - \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{U},$$

которое для определения  $\mathbf{d}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_\theta$  примет вид

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_*^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\theta*} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{IN};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_\theta + \mathbf{d}_\theta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_*^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\theta*} \cdot \mathbf{F}_*^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\theta.$$

Общий вид этих уравнений  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$  или  $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ , а  $\mathbf{X} = \mathbf{d}_{IN}$  или  $\mathbf{X} = \mathbf{d}_\theta$ , и такое уравнение имеет единственное решение, если тензоры  $\mathbf{A}$  и  $-\mathbf{B}$  не имеют общих собственных значений (см. [8, 9]). Рассматриваемые уравнения удовлетворяют этому условию.

### 3. ПЛАСТИЧЕСКАЯ РАБОТА, ПЕРЕШЕДШАЯ В ТЕПЛО

Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т.п. и энергий их взаимодействия. При низких скоростях деформации скорость нагрева равна скорости охлаждения и процесс считается изотермическим. При более высоких скоростях, однако, скорость генерации тепла намного выше, чем скорость охлаждения, и адиабатический процесс является причиной возрастания температуры (при испытаниях на сжатие). Для оценки доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло, вводится величина

$$\gamma = \dot{Q}_{IN} / \dot{W}_P, \quad (3.1)$$

где  $\dot{W}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}$  – мощность пластического деформирования, и экспериментально определяется зависимость  $\gamma$  от накопленной меры пластической деформации, за которую можно принять величину

$$\Lambda_P = \int_0^t \mathbf{D}_{IN}(\tau) \cdot \mathbf{D}_{IN}(\tau) d\tau.$$

До недавнего времени большинство работ в этой области проводилось в условиях квазистатического эксперимента. В результате чего был сделан вывод, что  $\gamma$  есть постоянная величина, принимающая значения между 0.8 и 1. Попытки измерить  $\gamma$  в динамических экспериментах, выполненных в широком диапазоне деформаций и скоростей деформаций, показали, что  $\gamma$  варьируется от 0.6 до 0.9 в зависимости от

исследуемого металла, величины деформации и от скорости деформации. Это является убедительным подтверждением влияния деформации и скорости деформации на распределение затраченной пластической работы на запасенную и тепловую части энергии. Экспериментальные данные по большим деформациям показали, что материал не может неограниченно накапливать энергию, и при некотором критическом уровне пластической деформации почти вся энергия превращается в тепло и  $\gamma$  достигает единицы. Типичная зависимость  $\gamma$  от  $\Lambda_P$  имеет вид (см. [10,11]) представленный на рис. 2.

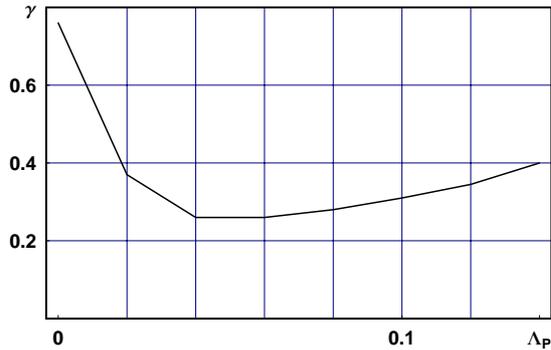


Рис. 2. Типичная зависимость  $\gamma$  от  $\Lambda_P$

В экспериментальных работах, связанных с пластическими деформациями, обсуждается вопрос зависимости упругих параметров материала от предварительной пластической деформации. Эксперименты М.А.Жукова и В.С.Ленского показали, что упругие свойства металлов зависят от пластической деформации. Так, предварительная пластическая вытяжка на 2% вызвала уменьшение модуля сдвига на 19%, а предварительная пластическая деформация сдвига на 4% уменьшила модуль Юнга на 20%. Продолжительный отдых пластически деформированного металла почти полностью восстанавливает первоначальные упругие свойства.

О.А.Шишмарев и Ю.А.Созонов согласны с этими выводами в качественной части, но в части количественной получили незначительное (5–7%) уменьшение первоначальных величин. Они дают объяснение такому несоответствию с данными работ М.А.Жукова и В.С.Ленского и указывают принципиальные моменты, не учтенные в последних, которые и могли привести к некорректным результатам.

Опираясь на эксперименты О.А.Шишмарева и Ю.А.Созонова, будем считать, что упругие свойства материала не зависят от предварительной (не очень глубокой) пластической деформации. Это приводит к тому, что в соотношении для скорости производства тепла неупругими источниками (2.15) (и в тензоре напряжений (2.9)) все производные от напряжения по скалярному структурному параметру  $\mu$  равны нулю (ограничимся только одним параметром), и оно переписывается в виде

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - 2\beta\theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu} \dot{\mu}. \quad (3.2)$$

В соответствии со вторым законом термодинамики (2.14) величины, входящие в соотношение (3.2), должны удовлетворять неравенству

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} \rho_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu} \dot{\mu} \geq 0.$$

В итоге выражение (3.1) представляется в виде

$$\gamma = (1 - 2\beta\theta) - \frac{J^{-1} \rho_0 (\partial \psi_3 / \partial \mu) \dot{\mu}}{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}}. \quad (3.3)$$

Учтем, что в пластичности

$$\mathbf{D}_{IN} = \frac{3 \dot{\sigma}_i}{2 H \sigma_i} \mathbf{S},$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $H$  – модуль пластического упрочнения;  $\mathbf{S}$  – девиатор тензора истинных напряжений. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_{IN} = \\ &= \frac{2H\sigma_i}{3\dot{\sigma}_i} (\mathbf{D}_{IN} \cdot \mathbf{D}_{IN}) = \frac{2H\sigma_i}{3\dot{\sigma}_i} \dot{\Lambda}_P. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Будем считать, что  $\mu$  есть функция от  $\Lambda_P$ . Отсюда

$\dot{\mu} = \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P} \dot{\Lambda}_P$  и соотношение (3.3) переписывается, с учетом (3.4), в виде

$$\gamma = (1 - 2\beta\theta) - J^{-1} \rho_0 \frac{3 \dot{\sigma}_i}{2 H \sigma_i} \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P}. \quad (3.5)$$

Разумно положить, что  $\mu(\Lambda_P)$  слабо меняется при малых  $\Lambda_P$ , затем скорость этого изменения значительно возрастает и, наконец, кривая выходит на насыщение. Такое поведение  $\mu(\Lambda_P)$  было описано двумя способами. Первый использовал две экспоненты, состыкованные в точке  $\Lambda_{P0}$ , в том числе и по первой производной:

$$\mu = \begin{cases} (1 - A) \exp \left[ \frac{cA}{1 - A} (\Lambda_P - \Lambda_{P0}) \right], & \Lambda_P \leq \Lambda_{P0}, \\ 1 - A \exp [-c(\Lambda_P - \Lambda_{P0})], & \Lambda_P \geq \Lambda_{P0}. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

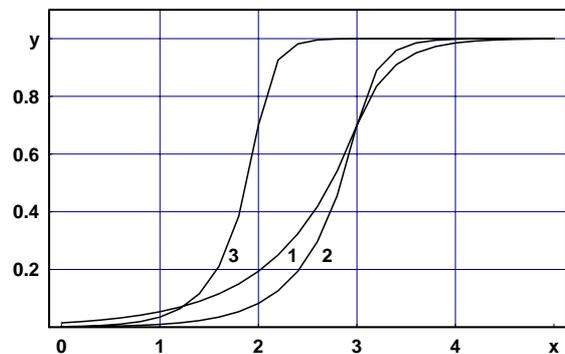


Рис. 3. Зависимости  $\mu$  (на рисунке  $y$ ) от  $\Lambda_P$  (на рисунке  $x$ ) при некоторых значениях параметров. 1 –  $A=0.3, c=3, \Lambda_{P0}=3$ ; 2 –  $A=0.3, c=5, \Lambda_{P0}=3$ ; 3 –  $A=0.3, c=7, \Lambda_{P0}=2$

Недостатки этой аппроксимации связаны с поведением функции  $\mu(\Lambda_P)$  при  $\Lambda_P \rightarrow 0$ . Поэтому предполагаемое поведение функции  $\mu(\Lambda_P)$  аппроксимировались еще и сплайном

$$\mu = \begin{cases} a_0 \Lambda_P^2 & 0 \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P1} \\ a_1 + b_1 \Lambda_P + c_1 \Lambda_P^2 & \Lambda_{P1} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P2} \\ a_2 + b_2 \Lambda_P + c_2 \Lambda_P^2 & \Lambda_{P2} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P3} \\ a_3 + b_3 \Lambda_P + c_3 \Lambda_P^2 & \Lambda_{P3} \leq \Lambda_P \leq \Lambda_{P4} \end{cases}, \quad (3.6)$$

где за  $\Lambda_{P2}$  принималась точка перегиба на кривой рис. 2, а за  $\Lambda_{P4}$  – самая правая точка того же рисунка. На коэффициенты сплайна накладывались условия сопряжения на концах каждого отрезка, в том числе и по производным, и требование определенного их поведения на каждом участке. Полученные связи определили независимые параметры сплайна. Полагая, что  $\psi_3(\mu) = a\mu + b\mu^2$ , и используя зависимость (3.6), преобразуем соотношение (3.5). Входящие в последнее коэффициенты находились из условия наилучшего приближения кривой на рис. 2 методом сканирования по этим коэффициентам. На рис. 4 приведена ломаная кривая из рис. 2, результаты ее сглаживания и приближения сплайном. Наибольшие погрешности в аппроксимации получились на концах области.

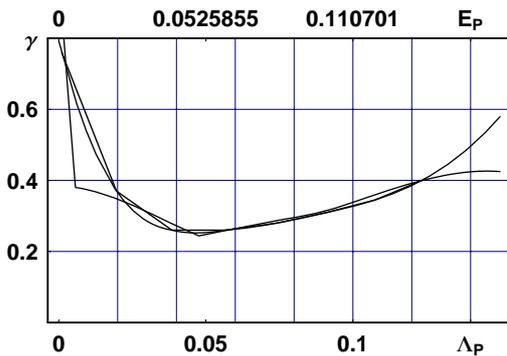


Рис. 4. Результаты описания кривой сплайном. На верхней горизонтальной шкале указана величина пластической деформации

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках конечных деформаций рассмотрены вопросы разделения неупругой энергии на тепловую и скрытую, связанную со структурными изменениями в материале. При этом, опираясь на экспериментальные данные, полагалось, что упругие свойства материала не зависят от изменений структуры, связанной с пластическими деформациями. Описана экспериментальная кривая доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роговой А.А. Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Электронный журнал «Физико-химическая кинетика в газовой динамике», 2008, т.7. Электронный адрес: [www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf)
2. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т.46. № 5. С.138–149.
3. Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т.48. №4. С.144–153.
4. Роговой А.А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т.49. № 1. С.165–172.
5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
6. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С.77–95.
7. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С.122–140.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
9. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
10. Hodowany J., Ravichandran G., Rosakis A.J., Rosakis P. On the partition of plastic work into heat and stored energy in metals; Part I: Experiments // GALCIT Technical Report SM № 98-7, California Institute of Technology, Pasadena, CA. 1998.
11. Rosakis P., Rosakis A.J., Ravichandran G., Hodowany J. A thermodynamic internal variable model for the partition of plastic work into heat and stored energy in metals // J. Mech. Phys. Solids. 2000. Vol. 48. pp. 581–607.