

## ДВУХМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТРАНСПОРТА В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.Ю. Чирков

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,  
Москва, 105005, 2-ая Бауманская ул., 5

### Аннотация

Обсуждается модель турбулентного транспорта в сдвиговых течениях плазмы в магнитном поле. Соответствующая турбулентность связана с развитием в плазме, находящейся в магнитном поле, кинетических неустойчивостей градиентно-дрейфового типа. Анализ показал, что для построения адекватной модели транспорта, учитывающей экспериментально наблюдаемые особенности, необходимо выделить две области волновых чисел турбулентных движений, для которых рассматриваются различные подходы. Для моделирования относительно мелкомасштабной турбулентности рассматривается алгоритм на основе метода Монте-Карло. В области относительно крупномасштабных движений используется нелинейная модель, позволяющая учесть образование структур и сильное влияние сдвигового течения.

### TWO-SCALE MODELLING OF TURBULENT TRANSPORT IN SHEARED FLOWS OF PLASMA IN MAGNETIC FIELD

Model of turbulent transport in sheared flows of plasma in magnetic field is discussed. Corresponding turbulence is connected with gradient-drift instabilities growing inside plasma in magnetic field. The analysis have shown to formulate the transport model taking into account experimentally observed features two ranges of wave number values could be considered separately using different approaches. For relatively small scale turbulence Monte-Carlo procedure is considered. For relatively large structures non-linear model taking into account strong sheared flow action is used.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Турбулентный транспорт играет важную роль в процессах обмена энергией и веществом, как в низкотемпературной, так и в высокотемпературной плазме. В настоящей работе рассматривается подход к моделированию транспорта в течениях замагниченной плазмы, причиной которого являются кинетические неустойчивости (микронеустойчивости не гидродинамической природы) градиентно-дрейфового типа. Такие неустойчивости не нарушают глобальной структуры плазменного образования, но именно с ними связаны транспортные механизмы, ответственные за потери энергии и вещества [1]. Инкременты таких неустойчивостей обычно превышают частоты столкновений, следовательно, эти неустойчивости вызывают наиболее интенсивный аномальный транспорт и их рассматривают в пределе бесстолкновительной плазмы. Картина транспортных процессов сильно зависит от неоднородных течений в плазме и их структуры [1–3].

Для описания транспорта и расчета соответствующих коэффициентов переноса необходимо располагать пространственным масштабом и характерным временем переноса (то есть корреляционной длиной и временем корреляции). Время корреляции обычно можно принять равным  $1/\gamma$ , где  $\gamma$  – характерное значения инкремента неустойчивости, вызывающей турбулентный транспорт. Выбор величины, характеризующий пространственный масштаб, зависит от диапазона волновых чисел, определяющего транспортные свойства.

На рис. 1 приведена шкала пространственных масштабов турбулентности. Выделим два характерных диапазона:  $1/L \ll k_{\perp} \lesssim 1/\rho_{Ti}$  и  $1/\rho_{Ti} \lesssim k_{\perp} \lesssim 1/\rho_{Te}$ , где  $k_{\perp}$  – поперечная по отношению к внешнему магнитному полю проекция волнового вектора;  $\rho_{Ti}$  и  $\rho_{Te}$  – ха-

рактерные значения циклотронных радиусов иона и электрона (вычисляемые по тепловой скорости);  $L$  – характерный размер плазмы. Движения с  $k_{\perp} \gg 1/\rho_{Te}$  (тем более с  $k_{\perp} \gtrsim 1/r_D$ , где  $r_D$  – дебаевский радиус) не представляют интереса с точки зрения турбулентного транспорта в замагниченной плазме. Глобальные движения с  $k_{\perp} \sim 1/L$  также не относятся к рассматриваемой здесь проблеме транспорта.



Рис. 1. Масштабы турбулентности

В области  $1/L \ll k_{\perp} \lesssim 1/\rho_{Ti}$  существенно сказывается влияние сдвиговых течений (стационарных или квазистационарных) и их нелинейное взаимодействие с турбулентными движениями и соответствующими неустойчивостями [1–5]. Для моделирования турбулентных структур и транспортных механизмов в этой области ранее была разработана модель нелинейного насыщения неустойчивости [6, 7]. Численные расчеты по этой модели показали, что соответствующие коэффициенты переноса практически совпадают с выражением, основанном на представлениях о деформации вихреобразных структур сдвиговым течением [2].

Таким образом, существенно различным особенностям транспорта соответствуют два диапазона волновых чисел турбулентных движений, обозначенные

нами следующим образом:  $1/L \ll k_{\perp} \lesssim 1/\rho_{Ti}$  – крупномасштабная турбулентность,  $1/\rho_{Ti} \gtrsim k_{\perp} \gtrsim 1/\rho_{Te}$  – мелкомасштабная. При слабых сдвиговых течениях транспорт, видимо, определяется крупномасштабной турбулентностью и размерами соответствующих структур. В случае сильной неоднородности течения происходит подавление крупномасштабных движений, и определяющими становятся мелкомасштабные хаотические движения. Они представляют наибольший интерес в рамках задачи о транспорте в сильно неоднородных сдвиговых течениях. Крупномасштабная область рассматривается в нашей двухмасштабной модели транспорта как замыкание в пределе слабых течений.

Для многих плазменных конфигураций механизм турбулентного транспорта недостаточно изучен, поэтому востребованными являются численные модели, базирующиеся на минимальном количестве теоретических и экспериментальных сведений при условии максимальной адекватности существующим экспериментальным данным. Этим требованиям удовлетворяют модели на основе метода Монте-Карло. В таких моделях состояния макроскопической системы выбираются случайным образом с учетом вероятности реализации выбранного состояния, которая определяется близостью к экстремумам термодинамических функций (минимум энергии или максимум энтропии).

Две особенности турбулентного транспорта в плазме, находящейся в магнитном поле, определяют преимущества метода Монте-Карло: 1) транспортные времена меньше столкновительных; 2) характерные пространственные масштабы порядка ионного циклотронного радиуса  $\rho_{Ti}$  (вычисляемого по тепловой скорости), а турбулентные движения с масштабами, значительно меньшими электронного циклотронного радиуса, мало влияют на глобальную картину транспорта. Бесстолкновительный режим в данном случае не означает, что потенциал взаимодействия для частиц плазмы можно считать равным нулю, так как взаимодействие частиц в плазме существенно на расстояниях порядка дебаевского радиуса  $r_D$  и меньших. Если же использовать кулоновский (или дебаевский) потенциал, то при моделировании по методу молекулярной динамики размер ячейки порядка  $r_D$ , что сильно увеличивает трудоемкость вычислений. В этом случае сведения о движениях на масштабах порядка  $r_D$  будут достаточно подробными, но лишними с точки зрения рассматриваемой задачи. Применение метода Монте-Карло для моделирования транспорта так же, как и в случае использования метода молекулярной динамики, подразумевает расчет траекторий большого числа частиц. Основная особенность представленного в настоящей работе алгоритма Монте-Карло заключается в том, что расчет смещений частиц за один шаг не требует сведений о силах и потенциалах взаимодействия между частицами. Изначально смещения могут принимать практически любые значения, но вероятность того, что координаты частиц примут те или иные значения учитывается условием возрастания энтропии. Формулировка и физическое обоснование этого условия является в настоящей работе одной из наиболее важных задач построения алгоритма для моделирования транспорта.

Некоторая необходимая информация при таком подходе может быть взята из экспериментальных данных, следовательно, такую модель можно называть феноменологической. Подход на основе метода Монте-Карло наиболее пригоден для моделирования турбулентного транспорта при сравнительно мелкомасштабных движениях, то есть при  $1/\rho_{Ti} \gtrsim k_{\perp} \gtrsim 1/\rho_{Te}$ .

## 2. МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Так как в любых плазменных конфигурациях конечных размеров есть градиенты концентрации и температуры, то градиентные дрейфовые неустойчивости являются в некотором смысле универсальной причиной турбулентности и транспорта в плазме, находящейся в магнитном поле. В плазме высокого давления для описания этих неустойчивостей необходимо учитывать электромагнитные эффекты. Исходная система линеаризованных уравнений для возмущений включает уравнение Власова, условие квазинейтральности и закон Ампера:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_{1j} = - \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla f_{0j}, \quad (1)$$

$$\sum_j q_j \int f_{1j} d^3v = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_j q_j \int \mathbf{v} f_{1j} d^3v. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость частицы;  $q_j$  и  $m_j$  – заряд и масса частицы сорта  $j$  ( $j = i, e$ );  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $f_{1j}$  – возмущение функции распределения;  $\mathbf{B}_0$  – невозмущенное магнитное поле;  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$  – электрическое поле волны;  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  – магнитное поле волны;  $\mathbf{k}$  – волновой вектор;  $\phi$  – скалярный электрический потенциал волны;  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал волны;  $f_{0j}(\mathbf{v}, x) = f_{Mj}(\mathbf{v})(1 - \varepsilon_j x)$  – невозмущенная функция распределения;  $f_{Mj}(\mathbf{v})$  – максвелловская функция

распределения;  $\varepsilon_j = - \frac{1}{f_{0j}} \left. \frac{\partial f_{0j}}{\partial x} \right|_{x=0}$ ;  $x$  – координата в

направлении, противоположном градиентам. Используется кулоновская калибровка  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . В рамках локального подхода параметры плазмы и их градиенты считаются постоянными и равными своим значениям при  $x = 0$ . Возмущения рассматриваются в подвижной системе отсчета.

Стандартная процедура интегрирования по невозмущенным траекториям приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных  $\phi, B_{\parallel}, A_{\parallel}$  [8]:

$$\sum_j \int \left[ \frac{q_j \phi}{k_B T_j} f_{Mj} + h_j J_0(\Lambda_j) \right] d^3v = 0, \quad (4)$$

$$k_{\perp} B_{\parallel} = -\mu_0 \sum_j q_j n_j \int h_j J_1(\Lambda_j) v_{\perp} d^3v, \quad (5)$$

$$k_{\perp}^2 A_{\parallel} = -\mu_0 \sum_j q_j n_j \int h_j J_0(\Lambda_j) v_{\parallel} d^3 v. \quad (6)$$

Здесь  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T_j$  – температура;  $J_0(\Lambda_j)$  и  $J_1(\Lambda_j)$  – функции Бесселя;  $\Lambda_j = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{cj}$ ; индексы  $\perp$  и  $\parallel$  обозначают компоненты векторов, перпендикулярные и параллельные силовым линиям невозмущенного магнитного поля;  $v_{\perp}$  – перпендикулярная компонента скорости частицы;  $v_{\parallel}$  – параллельная (продольная) компонента скорости;  $\omega_{cj}$  – циклотронная частота;

$$h_j = \frac{\omega + \bar{\omega}_{*j}}{\omega + \omega_{Dj} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \times \left[ (\varphi - v_{\parallel} A_{\parallel}) J_0(\Lambda_j) - \frac{v_{\perp}}{k_{\perp}} B_{\parallel} J_1(\Lambda_j) \right] \frac{q_j f_{Mj}}{k_B T_j} \quad (7)$$

– неадиабатическая часть возмущения функции распределения по скоростям;  $\omega_{Dj} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{Dj}$  – частота магнитного дрейфа частицы;  $\mathbf{V}_{Dj}$  – скорость магнитного дрейфа частицы;

$$\bar{\omega}_{*j} = \omega_{*j} \left[ 1 + \eta_j \left( \frac{m_j v^2}{2k_B T_j} - \frac{3}{2} \right) \right]; \quad (8)$$

$$\omega_{*j} = k_{\perp} \frac{k_B T_j}{q_j B_0 L_{nj}} \quad (9)$$

– частота диамагнитного дрейфа;  $\eta_j = L_{nj} / L_{Tj}$ ;  $L_{nj} = -n_j / \nabla_{\perp} n_j$ ;  $L_{Tj} = -T_j / \nabla_{\perp} T_j$ ;  $n_j$  – невозмущенная концентрация.

Отметим, что для ионов  $\omega_{*i} > 0$ , для электронов –  $\omega_{*e} < 0$ . Дрейфовая частота может быть выражена так:

$$\omega_{Dj} = -\omega_{*j} \frac{m_j}{k_B T_j} \left( \frac{L_{nj}}{L_B} \frac{v_{\perp}^2}{2} - \frac{L_{nj}}{R} v_{\parallel}^2 \right), \quad (10)$$

где  $L_B = B_0 / \nabla_{\perp} B_0$ ,  $1/R$  – усредненная по траектории частицы кривизна магнитной силовой линии.

Масштаб градиента индукции магнитного поля можно представить в виде

$$\frac{1}{L_B} = \sum_j \frac{(1 + \eta_j) \beta_j}{2L_{nj}},$$

где  $\beta_j = 2\mu_0 n_j k_B T_j / B_0^2$  – отношение давления  $j$ -го компонента к локальному давлению невозмущенного магнитного поля. Определим локальное отношение полного давления плазмы к давлению магнитного поля:

$$\beta = \sum_j \beta_j = \frac{\beta_0}{1 - \beta_0},$$

где  $\beta_0 = \frac{2\mu_0}{B_{0V}^2} \sum_j n_j k_B T_j$ ,  $B_{0V}$  – индукция внешнего (вакуумного) магнитного поля. Последнее связано с  $B_0$  соотношением  $B_0 = B_{0V} \sqrt{1 - \beta_0}$ .

Дисперсионное уравнение следует из равенства нулю определителя системы линейных алгебраических уравнений (4)–(6). В результате решения дисперсионного уравнения находятся зависимости действительной частоты и инкремента от  $k_{\perp}$  и  $k_{\parallel}$ , а также от параметров  $\eta_i$ ,  $\eta_e$ ,  $T_e/T_i$ ,  $\beta$ ,  $L_n/L_B$ ,  $L_n/R$ .

Отметим, что сдвиговые течения заметно влияют на величину инкремента в случае очень сильной неоднородности скорости [9]. Для этого пространственный масштаб неоднородности должен быть порядка  $\rho_{Ti}$ , что практически не реализуется. Поэтому в уравнениях (4)–(6) сдвиговые течения не учитываются. Сдвиговые течения проявляются в нелинейном взаимодействии с относительно крупномасштабными турбулентными структурами.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР

Для моделирования насыщения неустойчивости и транспорта в условиях сдвигового течения ранее была разработана нелинейная модель [6, 7]. Расчеты коэффициента турбулентной диффузии по этой модели в случае линейного распределения скорости сдвигового течения дают практически тот же результат, что и формула Ито [10]. При более сложной зависимости результат существенно отличается от случая линейного распределения.

В качестве примера здесь рассмотрим насыщение моды с  $k_{\perp} \ll 1/\rho_{Ti}$  в периодически изменяющемся в пространстве течении. Такое распределение скорости характерно для зональных течений – квазистационарных мод с нулевой частотой. Известно, что существует нелинейное взаимодействие таких течений с дрейфовой турбулентностью, приводящее к автоколебаниям, при которых последовательно сменяются состояния с сильным течением и низкими амплитудами турбулентных мод и, наоборот, с высоким уровнем турбулентности и низкой амплитудой течения [3–5].

Результаты численных расчетов приведены на рис. 2, 3, где показаны линии тока в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Координата  $y$  на рис. 2, 3 соответствует направлению сдвигового течения,  $x$  – направлению транспорта.

В первом случае (см. рис. 2) насыщение моды определяется наравне диффузионным механизмом и конвективным сносом в сдвиговом течении. На начальной стадии нарастания рассматриваемой крупномасштабной моды (см. рис. 2а) характер линий тока показывает, что мода не вызывает транспорта. Потoki в этом случае определяются квазистационарным течением, и они направлены поперек направления транспорта. Диффузионный механизм в этом случае обеспечивается мелкомасштабными флуктуациями. На стадии, близкой к насыщению моды (см. рис. 2б), линии тока соответствуют потокам в направлении транспорта. Далее квазистационарное течение затухает. Следовательно, интенсивность транспорта и коэффициент диффузии возрастают. Это приводит к распаду моды и генерации сдвигового течения. Состояние, показанное на рис. 2б, соответствует переходу от низкого уровня транспорта к высокому. Характерные размеры турбулентных структур в этом состоянии, видимо, следует принять в качестве среднего пространственного масштаба при расчете эффективного коэффициента диффузии.

Во втором случае (см. рис. 3) насыщение происходит практически за счет действия только сдвигового течения, амплитуда которого существенно больше, чем в случае на рис. 2. Как можно видеть, области по-

перечных потоков на рис. 3 заметно уже, чем на рис. 2в. Следовательно, максимальная интенсивность транспорта падает при увеличении амплитуды (а, следовательно, и градиента скорости) течения.

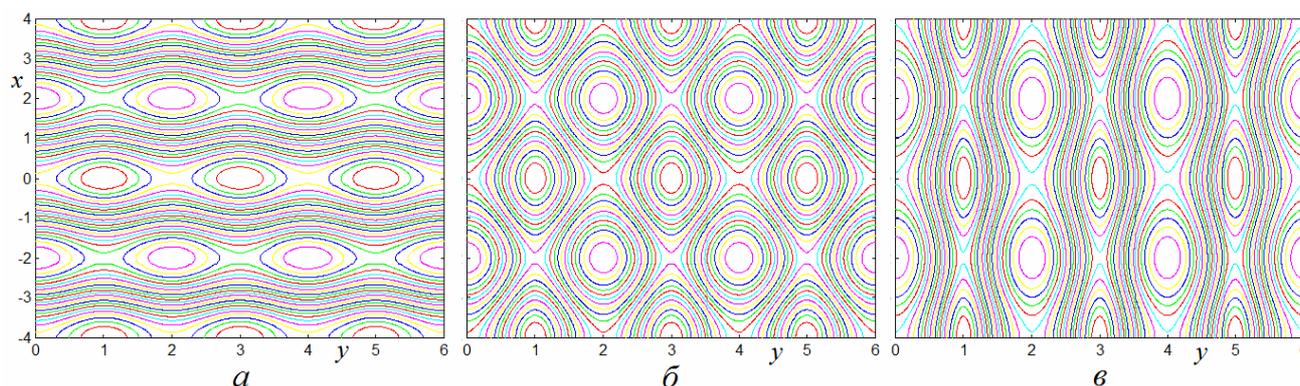


Рис. 2. Линии тока при нарастании (от а к в) возмущения в периодическом сдвиговом течении

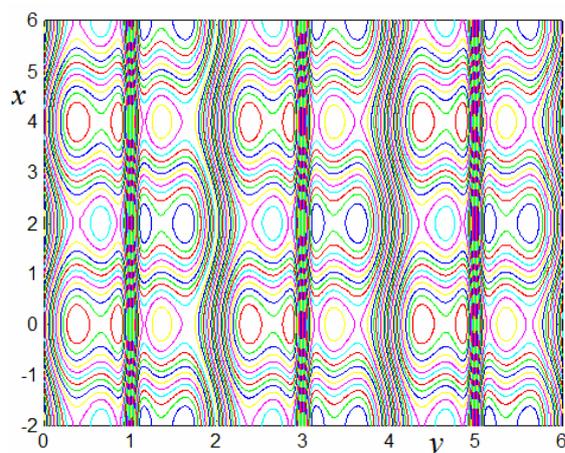


Рис. 3. Линии тока в состоянии, близком к насыщению, при преимущественном действии сдвигового течения

В случае сильной неоднородности течения крупномасштабные турбулентные структуры сильно подавляются, особенно, если генерируется и поддерживается стационарное сдвиговое течение. В этом режиме определяющими транспорт являются мелкомасштабные движения, на которые неоднородность течения практически не влияет. Транспорт при этом не зависит от масштаба неоднородности течения.

#### 4. АЛГОРИТМ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ МЕЛКОМАСШТАБНОГО ТРАНСПОРТА

В традиционных алгоритмах Монте-Карло обычно рассматривается стремление макроскопической системы к минимуму энергии. При этом необходимо учитывать как изменение энергии системы во внешних полях, так и изменение энергии взаимодействия частиц. Возрастание термодинамической энтропии, постулируемое вторым началом термодинамики, нам представляется более удобным для расчета, чем изменение энергии, так как рассчитываемая энтропия – функция макропараметров (например, температуры и концентрации частиц).

Рассмотрим наиболее простую геометрию плазмы – плоский слой, в котором концентрация частиц  $n$  и температура  $T$  уменьшаются в направлении  $x$ . Масштаб градиента концентрации  $L_n$  определим так:

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n}{L_n} \tag{11}$$

Пусть группа из  $N$  частиц в начальный момент времени находится в плоскости  $x = 0$ . Координаты каждой частицы в  $j+1$ -й момент времени рассчитываем в результате итераций вида

$$x_{j+1} = x_j + \xi_j W(\xi_j), \tag{12}$$

где  $x_j$  – значение координаты рассматриваемой частицы в предыдущий ( $j$ -ый) момент времени;  $\xi_j$  – случайные числа;  $W(\xi_j)$  учитывает вероятность того, что смещение может принимать значение  $\xi_j$ .

При моделировании транспорта в конкретной системе, необходимо, чтобы последовательности случайных чисел  $\xi_j$  соответствовала определенная плотность вероятности, наиболее адекватно отражающая особенности транспорта, присущие рассматриваемой системе. Большинство математических компьютерных программ снабжено генератором случайных чисел, выдающих значения от 0 до 1 с одинаковой вероятностью. Поэтому для получения последовательности случайных чисел  $\xi_j$  с заданной функцией распределения  $\Phi(\xi_j)$  необходимо преобразование случайных чисел  $\zeta_j$ , полученных с помощью такого генератора. Необходимое преобразование можно произвести так:

$$\xi = \Phi^{-1}(\zeta), \tag{13}$$

где  $\Phi^{-1}$  – обратная функция для функции  $\Phi$ .

В процедуре, определенной формулой (12), необходимая для неоднородной системы асимметрия учитывается величиной  $W$ . Поэтому для получения случайных чисел  $\xi_j$  можно использовать симметричное распределение с наиболее приемлемыми свойствами. Мы рассматривали распределение Лапласа и «равновероятное» распределение. Первое обладает тяжелыми «хвостами», второе, напротив, не имеет «хвостов». Эти распределения можно рассматривать как некоторые предельные случаи при анализе влияния особенностей распределения флуктуаций. В таблице приведены выражения для плотностей вероятности  $\phi(\xi)$  и функций распределения  $\Phi(\xi)$  для указанных распределений. Параметром распределений является среднеквадратичное отклонение  $\Delta x$ .

Таблица. Используемые симметричные распределения

Название	Плотность вероятности	Функция распределения
Распределение Лапласа	$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}\Delta x} \exp\left(-\frac{\sqrt{2} \xi }{\Delta x}\right)$	$\Phi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\sqrt{2}\xi}{\Delta x}\right), & \xi < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}\xi}{\Delta x}\right), & \xi \geq 0 \end{cases}$
«Равновероятное» распределение	$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}\Delta x}, &  \xi  \leq \sqrt{3}\Delta x \\ 0, &  \xi  > \sqrt{3}\Delta x \end{cases}$	$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < -\sqrt{3}\Delta x \\ \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2\sqrt{3}\Delta x}, & -\sqrt{3}\Delta x \leq \xi \leq \sqrt{3}\Delta x \\ 1, & \xi > \sqrt{3}\Delta x \end{cases}$

Случайные числа, получаемые с помощью процедуры, задаваемой формулой (13), в нашем алгоритме далее используются как исходные значения возможных смещений, которые далее корректируются величиной  $W(\xi)$ .

Соответствующее исходное распределение (с плотностью вероятности  $\varphi$  и функцией распределения  $\Phi$ ) при этом корректируется с учетом существования более вероятных и менее вероятных состояний ансамбля частиц. В итоге плотность вероятности и функция распределения смещений отличаются от исходных  $\varphi$  и  $\Phi$ .

Исходя из второго начала термодинамики и формулы Эйнштейна, функции  $W(\xi)$  можно приписать следующие свойства:

$$W(\xi) = \begin{cases} \exp\left[\frac{\Delta S(\xi)}{k_B}\right], & \xi \leq 0; \\ 1, & \xi > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь  $\Delta S(\xi) < 0$  – изменение энтропии системы, вызванное смещением рассматриваемой частицы,  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Согласно формуле (14), смещения частиц в направлении убывания концентрации соответствуют исходному распределению с заданной плотностью  $\varphi(\xi)$ , так как они увеличивают энтропию системы. Смещение в противоположном направлении уменьшает энтропию. Вероятность такого смещения ненулевая; она пропорциональна вероятности флуктуаций, приводящих к соответствующему уменьшению энтропии, определяемой формулой Эйнштейна.

Найдем изменение энтропии системы при перемещении одной частицы из области системы с температурой  $T_1$  и химическим потенциалом  $\mu_1$  в область с параметрами  $T_2$  и  $\mu_2$ . При этом изменение энтропии складывается из изменений первой и второй областей, образующих изолированную систему,

$$\Delta S(\xi) = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{\Delta U - \mu_1}{T_1} + \frac{\Delta U - \mu_2}{T_2}. \quad (15)$$

Здесь  $\Delta U = \frac{3}{2}k_B T_1$  – изменение внутренней энергии каждой из областей, связанное с переходом частицы из первой области во вторую (для первой области  $\Delta U_1 = -\Delta U$ , для второй области  $\Delta U_2 = \Delta U$ );

$\mu_{1,2} = \frac{5}{2}k_B T_{1,2} - T_{1,2} S_{1,2}$  – химический потенциал, приходящийся на одну частицу; различия между параметрами первой и второй областей считаются малыми.

Строго говоря, оперируя термодинамическими функциями (энтропией, химическим потенциалом и др.) для макроскопической системы, корректно рассматривать их молярные значения и изменения при изменении количества вещества 1 моль. Но, так как, 1 моль содержит определенное число частиц, то мы будем использовать молярные значения, деленные на число Авогадро, то есть в расчете на одну частицу (молекулярные величины).

Плазму считаем идеальным газом. Учтем, что в идеальной термодинамической системе молярные (или в расчете на одну частицу) величины не зависят от внешнего силового поля [11]. Тогда энтропия, приходящаяся на одну частицу равна

$$S(T, n) = S_0 + \frac{3}{2}k_B \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - k_B \ln\left(\frac{n}{n_0}\right), \quad (16)$$

где  $S_0$  – значение энтропии при температуре  $T_0$  и концентрации  $n_0$ .

Из термодинамических соотношений (15) и (16) следует, что

$$\Delta S = S(T_2, n_2) - S(T_1, n_1) + \frac{3}{2}k_B \frac{T_1 - T_2}{T_2}, \quad (17)$$

Рассматривая выражение (17) для бесконечно малого смещения с бесконечно малыми отличиями параметров, полагаем  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n + dn$ ,  $T_1 = T$ ,  $T_2 = T + dT$ . Тогда из (17) получаем

$$\frac{\Delta S}{k_B} = -\frac{dn}{n} = -\frac{\nabla n \xi}{n} = \frac{\xi}{L_n}. \quad (18)$$

При конечном смещении в результате интегрирования находим

$$\frac{\Delta S(\xi)}{k_B} = -\int_1^2 \frac{dn}{n} = -\ln \frac{n(x+\xi)}{n(x)}. \quad (19)$$

Как можно видеть по выражениям (18) и (19), при смещении в сторону возрастания концентрации ( $\xi < 0$ ) энтропия системы уменьшается.

При симметричном исходном распределении среднее по ансамблю значение смещения равно

$$\bar{\xi} = \int_0^{\infty} \xi [1 - \exp(-\xi/L_n)] \varphi(\xi) d\xi, \quad (20)$$

поток частиц данного сорта –

$$\Gamma = n \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = \frac{n \bar{\xi}}{\Delta t} = \frac{n}{\Delta t} \int_0^{\infty} \xi [1 - \exp(-\xi/L_n)] \varphi(\xi) d\xi, \quad (21)$$

где  $\bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t)$  – координата центра масс;

$V = \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = \frac{\bar{\xi}}{\Delta t}$  – скорость центра масс (скорость, характеризующая конвективный поток).

Среднеквадратичное отклонение частиц от центра масс характеризуется дисперсией

$$\sigma(t) = \overline{(x - \bar{x})^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_j - \bar{x})^2. \quad (22)$$

В предельном случае малых отклонений ( $\Delta x \ll L_n$ ) из (21) следует, что поток частиц описывается выражением диффузионного типа

$$\Gamma = \frac{n \Delta x^2}{2 L_n \Delta t} = -\frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \nabla n, \quad (23)$$

где коэффициент диффузии имеет вид

$$D_0 = \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t}. \quad (24)$$

Эту величину мы далее будем рассматривать как масштаб коэффициента диффузии и величины среднеквадратичного отклонения. В качестве масштаба скорости направленного движения примем

$$V_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (25)$$

Анализируя выражение для потока (21), можно сделать следующие выводы. При  $\Delta x \ll L_n$  реализуется диффузионный режим, при котором скорость направленного движения  $V \approx 0$ , а среднеквадратичное отклонение возрастает по закону  $\sigma = D_0 t$ . При  $\Delta x > L_n$  выражение для потока соответствует конвективному виду

$$\Gamma = nV = \frac{n}{\Delta t} \int_0^{\infty} \xi \varphi(\xi) d\xi \sim nV_0, \quad (26)$$

а транспорт носит баллистический характер, то есть  $\bar{x} = Vt$ , где направленная скорость  $V \sim V_0$ . Среднеквадратичное отклонение при этом также возрастает по линейному закону вида  $\sigma = Dt$ .

На рис. 4–6 представлены результаты численных расчетов, проведенных для случаев, когда исходные значения смещений соответствуют распределению Гаусса и «равновероятному» распределению.

Отметим, что при возрастании конвективного потока (и скорости центра масс  $V$ ) эффективный коэффициент диффузии уменьшается по сравнению со слу-

чаем  $V \rightarrow 0$ . Математически эта ситуация связана с дополнительным множителем, задаваемым выражением (14) и нарушающим нормировку исходного распределения. Как показали расчеты, при использовании распределений с сильно отличающимися свойствами транспортные коэффициенты имеют практически одинаковые значения. Поэтому при отсутствии данных о распределении пульсаций можно пользоваться наиболее удобным распределением. Рассмотренная выше процедура позволяет получить соотношение между коэффициентом диффузии и скоростью конвективного потока в зависимости от масштаба градиента концентрации. Для получения числовых значений этих величин, как было отмечено, необходим расчет параметров неустойчивости.

Рассмотрим случай, когда плазма находится в электрическом поле. Для его учета, согласно термодинамике, в выражении (15) необходимо химический потенциал заменить на

$$\mu^* = \mu + q\varphi_E, \quad (27)$$

где  $\varphi_E$  – электрический потенциал.

Тогда вместо (19) получим выражение

$$\frac{\Delta S(\xi)}{k_B} = -\int_1^2 \frac{dn}{n} - \int_1^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{q\varphi_E}{k_B T} \right) dx. \quad (28)$$

В случае малых отклонений ( $\Delta x \ll L_n$ )

$$\frac{\Delta S(\xi)}{k_B} = \left( -\frac{\nabla n}{n} - \frac{q}{k_B} \nabla \frac{\varphi_E}{T} \right) \xi = \left( \frac{1}{L_n} - \frac{q}{k_B} \nabla \frac{\varphi_E}{T} \right) \xi, \quad (29)$$

и соответствующий поток частиц равен

$$\Gamma = \frac{n \Delta x^2}{2 \Delta t} \left( \frac{1}{L_n} - \frac{q}{k_B} \nabla \frac{\varphi_E}{T} \right) = -D_0 \nabla n - \frac{qnD_0}{k_B} \nabla \frac{\varphi_E}{T}. \quad (30)$$

При конечных отклонениях

$$\frac{\Delta S(\xi)}{k_B} = -\ln \left( \frac{n_2}{n_1} \right) - \frac{q\varphi_{E2}}{k_B T_2} + \frac{q\varphi_{E1}}{k_B T_1}, \quad (31)$$

$$W(\xi) = \frac{n_1 \exp \left( \frac{q\varphi_{E1}}{k_B T_1} \right)}{n_2 \exp \left( \frac{q\varphi_{E2}}{k_B T_2} \right)}. \quad (32)$$

В термодинамическом равновесии при любых смещениях  $\Delta S(\xi) = 0$ ,  $W(\xi) = 1$ , откуда следует, что

$$\begin{aligned} n_1 \exp \left( \frac{q\varphi_{E1}}{k_B T_1} \right) &= n_2 \exp \left( \frac{q\varphi_{E2}}{k_B T_2} \right) = \\ &= n \exp \left( \frac{q\varphi_E}{k_B T} \right) = const. \end{aligned} \quad (33)$$

Распределение концентрации в этом случае удовлетворяет формуле Больцмана

$$n = n_0 \exp \left( -\frac{q\varphi_E}{k_B T} \right), \quad (34)$$

где  $n_0$  – значение концентрации в точке с нулевым потенциалом.

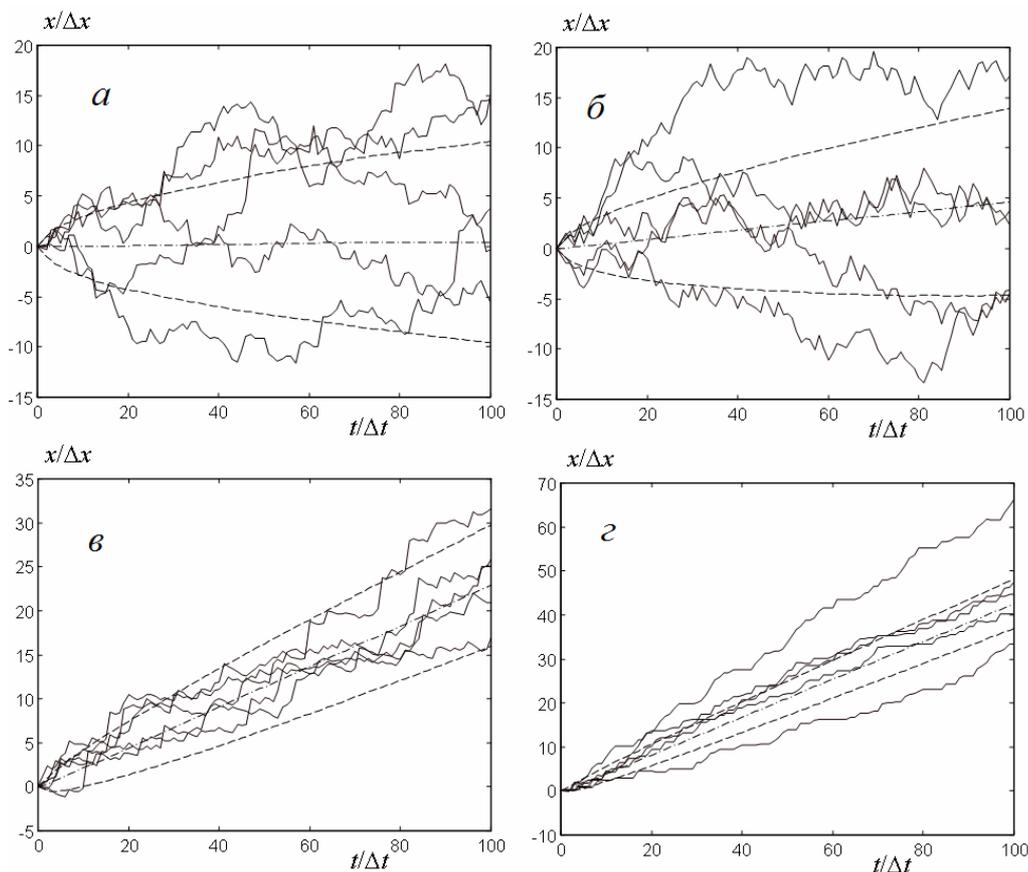


Рис. 4. Зависимости координат от времени для нескольких частиц (сплошные линии). Общее число частиц  $N = 10^4$ . Значения отношения  $\Delta x / L_n$ :  $a - 10^{-2}$ ,  $б - 10^{-1}$ ,  $в - 1$ ,  $г - 10$ . Исходное распределение:  $a, в$  – Лапласа,  $б, г$  – «равновероятное». Пунктирные линии – границы области среднеквадратичного отклонения, штрих-пунктирные линии – траектории центра масс группы частиц

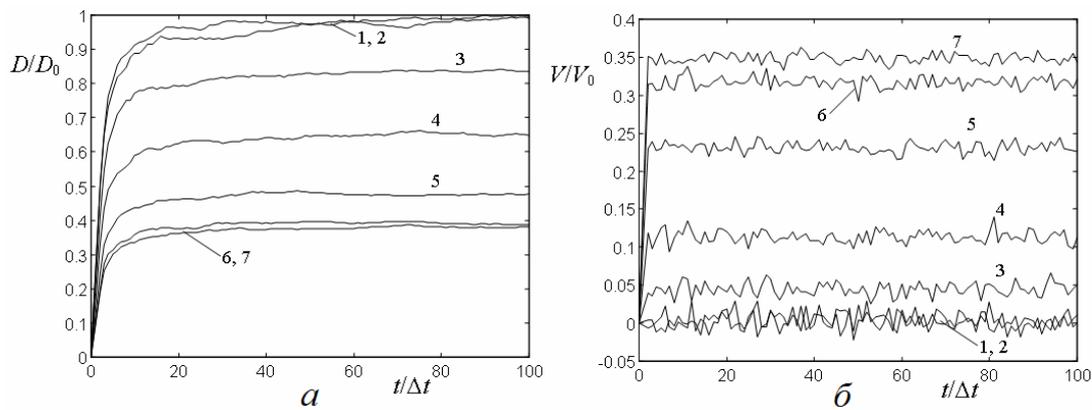


Рис. 5. Коэффициент диффузии ( $a$ ) и скорость конвективного потока ( $б$ ) для случая исходного распределения Лапласа. Общее число частиц  $N = 10^4$ . Значения отношения  $\Delta x / L_n$ :  $1 - 10^{-3}$ ,  $2 - 10^{-2}$ ,  $3 - 10^{-1}$ ,  $4 - 0.3$ ,  $5 - 1$ ,  $6 - 3$ ,  $7 - 10$

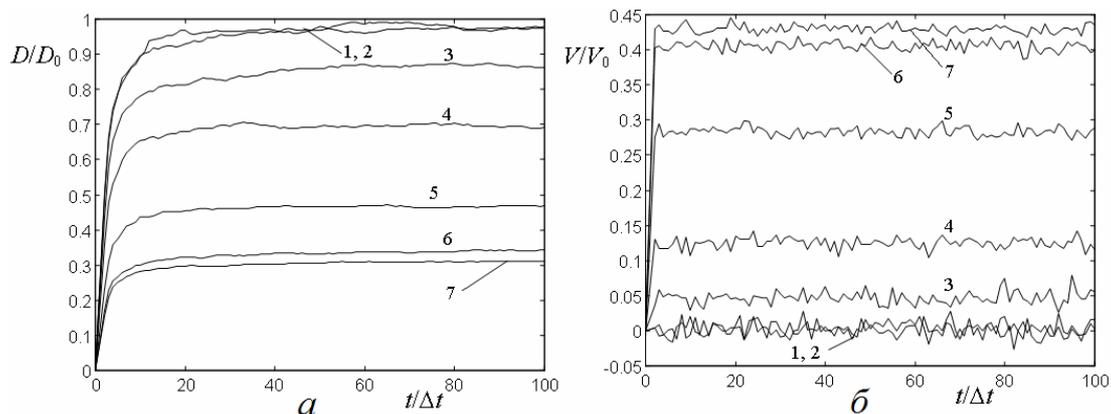


Рис. 6. То же, что на рис. 5, для случая «равновероятного» исходного распределения

Распределение концентрации в этом случае удовлетворяет формуле Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{q\varphi_E}{k_B T}\right), \quad (34)$$

где  $n_0$  – значение концентрации в точке с нулевым потенциалом.

Для двухкомпонентной плазмы условие квазинейтральности записывается следующим образом:

$$en_e = q_i n_i, \quad (35)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $q_i$  – заряд иона.

Согласно (34), для выполнения условия квазинейтральности в покоящейся плазме электрическое поле должно быть равно нулю. В действительности в плазме, удерживаемой магнитным полем, наблюдается электрическое поле. Равновесие и квазинейтральность плазмы в этом случае обеспечивается течениями ионов и электронов поперек магнитного поля. Для учета течений и магнитного поля ограничимся рассмотрением случая, когда поля скоростей течений ионов и электронов  $\mathbf{u}_{i,e}$  удовлетворяют условию  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{i,e} = 0$ . В квазистационарном случае эффективным электрическим полем можно считать величину

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}_{i,e} \times \mathbf{B} = -\nabla(\varphi_E - \mathbf{u}_{i,e} \cdot \mathbf{A}), \quad (36)$$

где  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  – вектор индукции магнитного поля,  $\mathbf{A}$  – вектор-потенциал магнитного поля.

В соответствии с (36) можно ввести эффективный потенциал

$$\varphi_{i,e}^* = \varphi_E - \mathbf{u}_{i,e} \cdot \mathbf{A}, \quad (37)$$

который необходимо подставить в (27)–(34) вместо  $\varphi_E$ .

Тогда в термодинамическом равновесии из условия квазинейтральности получаем выражение

$$-\frac{q_i(\varphi_E - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A})}{k_B T_i} = \frac{e(\varphi_E - \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{A})}{k_B T_e}. \quad (38)$$

Этот же результат следует из решения кинетического уравнения для плазмы в магнитном поле [12].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Располагая данными о параметрах неустойчивости и влиянии неоднородности скорости течения, можно в рамках представленных подходов определить коэффициент турбулентной диффузии. Зная соотношение между транспортными коэффициентами, далее можно рассчитать конвективный транспортный поток. Инкремент неустойчивости определяет масштаб времени, а пространственный масштаб транспорта зависит от характерного (определяющего) значения  $k_{\perp}$ .

Работа поддержана грантами РФФИ 08-08-00459-а и Президента РФ МК-2082.2008.8.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Itoh K., Itoh S.-I. The role of the electric field in confinement // *Plasma Phys. Control Fusion*. 1996. V. 38. P. 1–49.
2. Horton W. Drift waves and transport // *Rev. Mod. Phys.* 1999. V. 71. P. 735–778.
3. Diamond P.H., Itoh S.-I., Itoh K., Hahn T.S. Zonal flows in plasma – a review // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2005. V. 47. P. R35–R161.
4. Kim E. Theory of turbulence regulation by oscillatory zonal flows // *Phys. Plasmas*. 2006. V. 13. Paper 022308.
5. Sen A.K., Sokolov V., Wei X. A new paradigm for plasma transport and zonal flows // *Phys. Plasmas*. 2006. V. 13. Paper 055905.
6. Чирков А.Ю. Нелинейное насыщение дрейфовых неустойчивостей, турбулентность и транспорт в сдвиговых течениях плазмы в магнитном поле // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2008. Т. 7. <http://www.chemphys.edu.ru/media/files/2008-09-01-010.pdf>
7. Чирков А.Ю. Нелинейные дрейфовые волны в сдвиговых течениях плазмы // *Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки*. 2008. № 3. С. 3–16.
8. Jenko F., Dorland W., Kotschenreuter V., Rogers B.N. Electron temperature gradient driven turbulence // *Phys. Plasmas*. 2000. V. 7. P. 1904–1910.
9. Artun M., Tang W.M. Gyrokinetic analysis of ion temperature gradient modes in the presence of sheared flows // *Phys. Fluids*. 1992. V. B4. P. 1102–1114.
10. Itoh K., Itoh S.-I. The role of the electric field in confinement // *Plasma Phys. Control Fusion*. 1996. V. 38. P. 1–49.
11. Тер Хаар Д., Вергеланд Г. Основы термодинамики. М.: Вузовская книга, 2006.
12. Клеммоу Ф., Доуэрти Дж. Электродинамика частиц и плазмы. М.: Мир, 1996.