

# ВЛИЯНИЕ УЧЕТА НЕРАВНОВЕСНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

И.Э. Иванов<sup>1</sup>, И.А. Крюков<sup>2</sup>, Е.В. Ларина<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, 119991, Ленинские горы, 1-2*

<sup>2</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Иилинского Российской академии наук, Москва, 119526, проспект Вернадского, 101-1*

<sup>3</sup> *Московский авиационный институт, Москва, 125993, Волоколамское шоссе, 4*

## Аннотация

В работе рассматривается задача о взаимодействии однородной изотропной турбулентности со стационарной нормальной ударной волной. Дается сравнение влияния различных способов учета неравновесности турбулентности в  $k-\varepsilon$  модели на усиление турбулентности за ударной волной.

## INFLUENCE OF NON-EQUILIBRIUM MODIFICATIONS OF TWO-EQUATION TURBULENCE MODELS ON NUMERICAL PREDICTION OF TURBULENCE/SHOCK INTERACTION

I.E. Ivanov<sup>1</sup>, I.A. Kryukov<sup>2</sup>, E.V. Larina<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Russia, Moscow, 119991*

<sup>2</sup> *Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow, 119526*

<sup>3</sup> *Moscow aviation institute, Russia, Moscow, 125993*

The problem of homogenous isotropic turbulence interaction with steady normal shock is considered. Comparison of some non-equilibrium modifications of two-equation  $k-\varepsilon$  turbulence model is presented.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие турбулентности с ударными волнами играет важную роль в ряде практических приложений. Например, взаимодействие ударной волны с турбулентным пограничным слоем может вызвать отрыв пограничного слоя и увеличение теплового потока к поверхности. В настоящее время в инженерной практике для расчета турбулентных течений используются осредненные по Рейнольдсу или Фавру уравнения Навье–Стокса совместно с двухпараметрическими моделями турбулентности. Но численное моделирование на основе двухпараметрических моделей турбулентности течений, в которых происходит взаимодействие турбулентности с ударными волнами, не всегда позволяет получить важные характеристики течения с необходимой точностью.

Взаимодействие однородной изотропной турбулентности с ударной волной, расположенной перпендикулярно потоку, является фундаментальной задачей, которая исследовалась аналитически на основе LIA (Linear Interaction Analysis) [2,3] и численно с использованием прямого численного моделирования [2-4]. Поэтому эта задача является очень привлекательной с точки зрения анализа и совершенствования полумпирических моделей турбулентности. Одной из первых работ, где бы исследовалось данное течение на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений На-

вье – Стокса, была работа [1]. В этой работе предполагалось, что осредненное течение известно, т.е. средняя плотность и скорость брались из соотношения на ударной волне, а структура УВ задавалась с помощью гиперболических тангенсов в соответствии с шириной УВ, полученной прямым численным моделированием. Турбулентность описывалась двухпараметрической  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности. Такой подход заметно упрощает задачу с вычислительной точки зрения – остаются только два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые легко решаются любым численным методом для ОДУ. При таком подходе теряется «обратная связь», т.е. отсутствует влияние модели турбулентности (в первую очередь через турбулентную вязкость) на поле средней скорости.

В данной работе на основе решения полной системы осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса и уравнений  $k-\varepsilon$  модели турбулентности исследуются особенности двухпараметрических моделей турбулентности, которые в значительной степени влияют на описание взаимодействия турбулентности с ударными волнами. Это учёт отклонения турбулентности от равновесности (когда производство турбулентности становится существенно больше её диссипации), обеспечение реализуемости тензора напряжений Рейнольдса и учёт ряда физических эффектов, связанных со сжимаемостью [19, 20].

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим уравнения  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности, записанные для одномерного течения сжимаемого газа при использовании осреднения по Фавру:

$$\bar{\rho}\langle u \rangle \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_k \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \tau \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \bar{\rho}(\varepsilon_s + \varepsilon_d), \quad (1)$$

$$\bar{\rho}\langle u \rangle \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} \right) + c_{1\varepsilon} \tau \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \frac{\varepsilon_s}{k} - c_{2\varepsilon} \bar{\rho} \frac{\varepsilon_s^2}{k},$$

где чертой сверху обозначено осреднение по Рейнольдсу, а угловыми скобками – осреднение по Фавру. Кинетическая энергия турбулентности определяется следующим образом  $k = \langle u_i'' u_i'' \rangle / 2$ , а нормальное напряжение Рейнольдса  $\tau = -\bar{\rho} \langle u'' u'' \rangle$ . Коэффициенты переноса в (1) имеют вид

$$D_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad D_\varepsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}. \quad (2)$$

В соответствии с гипотезой Буссинеска нормальное напряжение Рейнольдса пропорционально градиенту средней скорости

$$\tau = \frac{4}{3} \mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k, \quad (3)$$

где  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости, который для  $k$ - $\varepsilon$  модели имеет следующий вид:

$$\mu_t = c_\mu \frac{\bar{\rho} k^2}{\varepsilon_s}. \quad (4)$$

Конкретный вариант  $k$ - $\varepsilon$  модели определяется набором эмпирических постоянных (в общем случае – функций)  $[c_\mu, c_{1\varepsilon}, c_{2\varepsilon}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon]$ . Модель [6] со следующим набором постоянных считается «стандартной»:

$$c_\mu = 0.09, c_{1\varepsilon} = 1.44, c_{2\varepsilon} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (5)$$

Осредненные по Фавру уравнения импульса и энергии имеют хорошо известный вид [7] и здесь не приводятся.

Для решения полученной системы используется метод из работы [8]: метод повышенного порядка точности по пространству TVD типа (второго или третьего порядка вдали от экстремумов), точный решатель задачи Римана и метод Рунге–Кутты второго порядка точности для аппроксимации по времени.

## 3. НЕРАВНОВЕСНОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В уравнении (1) член вида

$$P_k = \tau \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \quad (6)$$

описывает порождение КЭТ за счет сдвига средней скорости. Введем безразмерный параметр сдвига

$$S = \frac{k}{\varepsilon_s} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x}.$$

При использовании гипотезы Буссинеска (3) порождение  $P_k / \bar{\rho} \varepsilon_s$  становится пропорциональным  $S^2$ . В то же время при стремлении безразмерного параметра сдвига к бесконечности должно выполняться [9] условие

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \left( \frac{P_k}{\bar{\rho} \varepsilon_s} \right) \approx S \quad (7)$$

Турбулентность находится в равновесии, когда порождение приближенно равно диссипации, т.е.

$$\lambda = \frac{P_k}{\bar{\rho} \varepsilon_s} \approx 1.$$

При заметном отклонении от равновесия существенным становится наличие дополнительного масштаба времени  $\bar{\rho} k / P_k$  помимо фундаментального масштаба  $k / \varepsilon_s$ . В этом случае должно нарушаться предположение о прямой пропорциональности между порождением КЭТ и «порождением» диссипации энергии турбулентности.

Поэтому в работе [10] предложено добавить в уравнение для  $\varepsilon_s$  дополнительный член, который можно объединить с членом «порождения» скорости диссипации, т.е.

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 1} + c_{\varepsilon 3} \lambda.$$

Кроме того, в [10] предложено изменить и значения некоторых других констант стандартной  $k$ - $\varepsilon$  модели

$$c_{\varepsilon 1} = 1.15, c_{\varepsilon 2} = 1.9, \sigma_k = 0.75, \sigma_\varepsilon = 1.15, c_{\varepsilon 3} = 0.25$$

Для целого ряда течений эта модель позволила заметно улучшить результаты расчетов по сравнению со стандартной  $k$ - $\varepsilon$  моделью. В то же время ряд авторов отмечает [11,12], что использование этой модели может приводить и к ухудшению результатов. Это вероятно связано с нелинейной зависимостью реального отклонения от равновесия от параметра  $\lambda$ . Поэтому в [11] предложены другие постоянные в уравнении для  $\varepsilon$ :  $c_{\varepsilon 1} = 1.35, c_{\varepsilon 3} = 0.05$ , что приводит к существенно более слабой зависимости от  $\lambda$ .

В работе [12] предложено «компенсировать» зависимость «порождения» скорости диссипации от  $\lambda$  при помощи аналогичной зависимости для члена, описывающего «диссипацию скорости диссипации», т.е.

$$c_{\varepsilon 2} = c_{\varepsilon 2} + c_{\varepsilon 4} \lambda,$$

где  $c_{\varepsilon 2} = 1.45, c_{\varepsilon 4} = 0.45$ . Использование этого соотношения напрямую привело бы к неправильному поведению диссипации при затухании турбулентности, поэтому необходимо ограничить это соотношение снизу

$$c_{\varepsilon 2} = \max(0, c_{\varepsilon 2} + c_{\varepsilon 4} \lambda)$$

Ещё одна модель была предложена в [13]. В ней используется похожий механизм учета отклонения от равновесия, но зависимость от соответствующего параметра не линейная, а дробно рациональная

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 1} \left( 1 + \frac{c_{\varepsilon 3}}{c_{\varepsilon 1}} \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

В этой модели автор предлагает использовать коэффициенты стандартной  $k-\varepsilon$  модели. Значение  $c_{\varepsilon 3} = 0.3$ .

В работе [14] на основе ренормгруппового подхода получен вариант  $k-\varepsilon$  модели турбулентности, позволяющий заметно лучше учесть неравновесные эффекты. В уравнение для скорости диссипации добавляется дополнительный член, который можно объединить с членом "порождения" скорости диссипации

$$c_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 1} \left( 1 - \eta \frac{1 - \eta / \eta_0}{1 + \beta \eta^3} \right),$$

где  $\eta = \sqrt{P_k / c_{\mu} \bar{\rho} \varepsilon_s}$ ,  $\eta_0 = 4.38$ ,  $\beta = 0.012$ . Коэффициенты модели получены на основе ренормгрупповой теории турбулентности и имеют вид

$$c_{\varepsilon 1} = 1.42, c_{\varepsilon 2} = 1.68, \sigma_k = \sigma_{\varepsilon} = 0.7179, c_{\mu} = 0.084$$

Из (6) видно, что порождение КЭТ пропорционально тензору напряжений Рейнольдса. Поэтому неравновесность турбулентности довольно близко связана с реализуемостью напряжений Рейнольдса.

Нарушение условия реализуемости, возникающее из-за использования гипотезы Буссинеска (3), может приводить к отрицательным значениям нормальных напряжений и, следовательно, к аномальному росту кинетической энергии турбулентности в застойных зонах или вблизи зон больших градиентов скорости. Эмпирически было установлено (без относительно к условию реализуемости), что в двухпараметрических моделях турбулентности необходимо вводить ограничение на производство кинетической энергии турбулентности

$$\frac{P_k}{\bar{\rho} \varepsilon_s} < P_{\max}, \quad (8)$$

где  $P_{\max}$  – некоторая константа. Такой ограничитель использовался во многих работах (например, в [15] при  $P_{\max} = 10$ ) на этапе установления для ускорения сходимости к стационарному решению. Отметим, что явно такой ограничитель был введен как часть модели турбулентности в SST модели [16], что привело к заметному улучшению результатов, особенно при расчете отрывных течений. В работе [17] было показано, что явное использование такого ограничителя в  $k-\varepsilon$  модели также приводит к улучшению результатов. В это же работе было показано, что ограничитель (8) относительно мало зависит от значения  $P_{\max}$  в диапазоне  $10 < P_{\max} < 50$ .

В работе [18] показано, что ограничение вида (8) возникает из условий реализуемости напряжений Рейнольдса, и получено значение  $P_{\max} = 4 / (3c_{\mu}) \approx 14.8$ . В настоящей работе в большинстве расчетов использовалось значение  $P_{\max} = 15$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим взаимодействие однородной изотропной турбулентности со стационарной ударной волной, результаты прямого численного моделирования которого представлены в [2,3]. В этом случае исследуется взаимодействие турбулентности с  $M_t = 14$  и

$Re_{\lambda} = 19.1$  с ударной волной с  $M_1 = 1.29$ . Это дает во входном сечении  $k_{in} = 0.0098$  и  $\varepsilon_{in} = 0.0013$ .

На рис. 1 показано сравнение рассчитанного распределения КЭТ с использованием стандартной  $k-\varepsilon$  модели с результатами прямого численного моделирования [3] (кружочки) и с результатами [1] (пунктирная линия).

Видно, что согласованный расчет параметров среднего течения и характеристик турбулентности даёт заметно лучшее совпадение с результатами прямого численного моделирования по поведению КЭТ за ударной волной в целом. В тоже время, как и в [1] и [5], не удается полностью воспроизвести поведение КЭТ, полученное в результате прямого численного моделирования, – резкий рост КЭТ на фронте ударной волны с последующим резким падением (практически до уровня перед УВ) и уже после этого выход на затухание турбулентности в равномерном потоке.

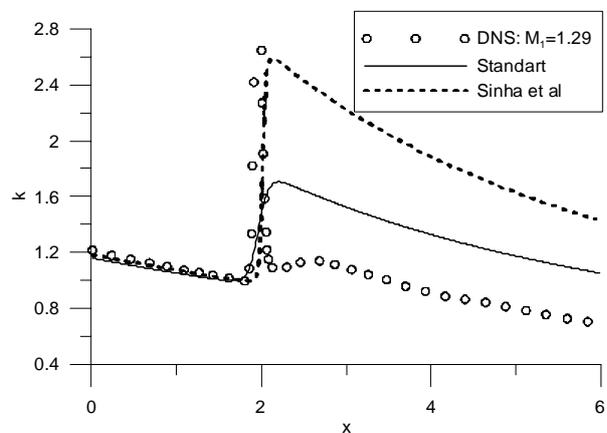


Рис. 1. Распределение КЭТ при  $M_1 = 1.29$ . Сравнение расчета по стандартной модели с результатами [1]

На рис. 2 показано сравнение различных моделей учета неравновесности турбулентности, описанных в п.2. Видно, что наилучшие результаты позволяют получить модели [12] и [14]. В тоже время, следует отметить, что эти модели дают несколько более высокий темп затухания КЭТ и, возможно, при дальнейшем счете при  $x > 6$  расхождение с результатами прямого численного моделирования у этих двух моделей может вырасти.

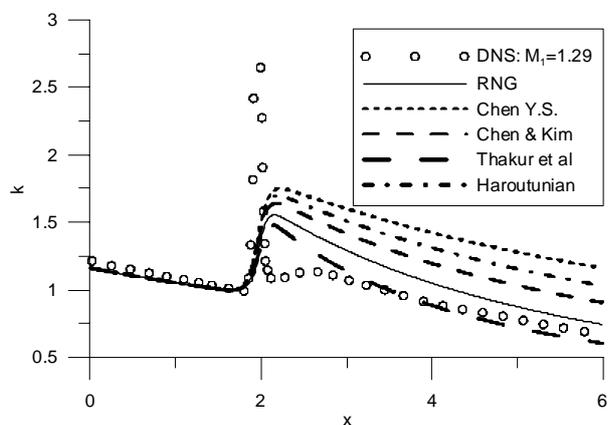


Рис. 2. Распределение КЭТ при  $M_1 = 1.29$ . Сравнение различных моделей учета неравновесности.

На рис. 3 показано влияние параметра  $P_{\max}$  в (8) на результаты численного моделирования. Видно, что с уменьшением этого параметра уменьшается возрастание уровня КЭТ на УВ. Это легко предсказуемо из смысла ограничения (8). При  $P_{\max} > 20$  влияние этого параметра уже не видно. Это говорит о том, что при данной интенсивности УВ максимальное значение отношения порождения КЭТ к диссипации равно примерно 20.

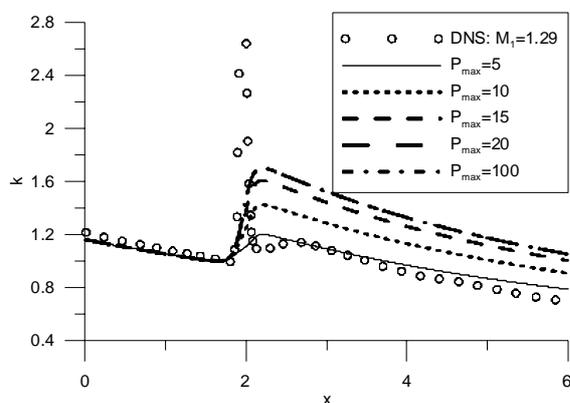


Рис. 3. Распределение КЭТ при  $M_1 = 1.29$ . Влияние постоянной  $P_{\max}$  в ограничителе (8)

В работе была исследована зависимость получаемых результатов от параметров расчетной сетки и численного метода. Все представленные результаты являются сеточно независимыми, т.е. не меняются при сгущении расчетной сетки или её адаптации [21].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано влияние учета неравновесности и обеспечения реализуемости в  $k-\varepsilon$  модели турбулентности на численное моделирование взаимодействия однородной изотропной турбулентности со стационарной ударной волной. Численное моделирование проводилось в согласованном режиме, т.е. совместно решались уравнения баланса импульса и энергии для среднего течения и уравнения для характеристик турбулентности. Это позволило заметно улучшить результаты по сравнению с подходом, в котором среднее течение считается заданным по результатам прямого численного моделирования.

Ещё более существенно может улучшить результаты численного моделирования этого течения может учет неравновесности турбулентности. Наилучшие результаты для  $M_1 = 1.29$  дают модели [12] и [14].

Использование ограничителя (8), обеспечивающего реализуемость напряжений Рейнольдса, может заметно повлиять на результаты моделирования. Особенно при малых значениях параметра  $P_{\max}$ .

Для лучшего понимания физики данного течения необходимо провести дополнительное численное моделирование в более широком диапазоне параметров. К сожалению, доступные в данное время реализации, полученные прямым численным моделированием, ограничены очень маленькими значениями  $Re_\lambda$  и  $M_t$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 10-01-00711).

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- КЭТ — кинетическая энергия турбулентности;  
 УВ — ударная волна;  
 $\rho$  — плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  
 $M_1$  — число Маха набегающего потока;  
 $M_t = (2k)^{1/2}/a$  — число Маха турбулентности;  
 $Re_\lambda$  — число Рейнольдса, определяемое по тейлоровскому микромасштабу;  
 $p$  — давление,  $\text{Н}/\text{м}^2$ ;  
 $k$  — КЭТ;  $(\text{м}/\text{с})^2$ ;  
 $\varepsilon$  — скорость диссипации (диссипация) КЭТ;  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;  
 $\varepsilon_s$  — соленоидальная диссипация;  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;  
 $\varepsilon_d$  — сжимаемая диссипация;  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;  
 $u$  — составляющая скорости вдоль  $x$  оси,  $\text{м}/\text{с}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Sinha, K. Mahesh, G.V. Candler, Modeling shock unsteadiness in shock turbulence interaction // *Phys. Fluids*, 2003, 15, 2290-2297.
2. K. Mahesh, S. K. Lele, P. Moin, The influence of entropy fluctuations on the interaction of turbulence with a shock wave // *J. Fluid Mech.*, 1997, 334, 353-379.
3. K. Mahesh, P. Moin, S. K. Lele, The interaction of a shock wave with a turbulent shear flow // *Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Report No. TF-69, Stanford, CA, 1996.*
4. S. Jamme, J.-B. Cazalbou, F. Torres, P. Chassaing, Direct numerical simulation of the interaction between a shock wave and various types of isotropic turbulence // *Flow, Turbul. Combust.*, 2002, 68, 227-268.
5. V.K. Veera, K. Sinha, Modeling the effect of upstream temperature fluctuations on shock/homogeneous turbulence interaction // *Phys. Fluids*, 2009, 21, 025101.
6. Launder B.E., Spalding D.B., The numerical computation of turbulent flows // *Computer Meth. Appl. Mech. Engr.*, 1974, 3, 3, 269-289.
7. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А., Расчет сверхзвуковых турбулентных течений, Препринт 793, М.: ИПМ РАН, 2006.
8. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Метод расчета турбулентных сверхзвуковых течений // *Математическое моделирование*, 2009, 21, 12, 103-121.
9. Jongen T., Gatski T.B., A new approach to characterizing the equilibrium states of the Reynolds stress anisotropy in homogeneous turbulence // *Theor. Comp. Fluid Dynamics*, 1998, 11, 31-47.
10. Chen Y.S., Kim S.W., Computation of turbulent flows using an extended  $k-\varepsilon$  turbulence closure model, NASA Contractor Report 179204, 1987.
11. Haroutunian V., Simulation of vortex shedding past a square prism using three two-equation turbulence models, Sixth Int. Symp. on CFD (Lake Tahoe, Nevada), vol. 1, 1995, 408-414.
12. Thakur S.S., Wright J.A., Shyy W., Liu J., Ouyang, H., Vu T., Development of pressure-based composite multigrid methods for complex fluid flows // *Prog. Aerospace Sci.*, 1996, 32, 4, 313-373.
13. Chen Y.S., Applications of a new wall function to turbulent flow computations, AIAA Pap. 86-0438, 1986.
14. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G., Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // *Phys. Fluids A*, 1992, 4, 7, 1510-1520.
15. Gerolymos G.A., Implicit multiple grid solution of the compressible Navier-Stokes equations using  $k-\varepsilon$  turbulence closure // *AIAA J.*, 1990, 28, 10, 1707-1717.

16. *Menter F.R.*, Zonal two-equation  $k-\omega$  models for aerodynamics flow, AIAA Pap. 93-2906, 1993.
17. *Kral L.D., Mani M., Ladd J.A.*, Application of turbulence models for aerodynamic and propulsion flowfields // AIAA J., 1996, **34**, 11, 2291–2298.
18. *Park C.H., Park S.O.*, On the limiters of two-equation turbulence models // Int. J. Comput. Fluid Dyn., 2005, **19**, 1, 79–86.
19. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Численное моделирование отрывных течений в соплах // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2010, 9, <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-024.pdf>.
20. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2010, Т.9. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-023.pdf>
21. Кузенов В.В. Использование регулярных адаптивных сеток для анализа импульсных сверхзвуковых струй плазмы // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2008, Т.7. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-016.pdf>