

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Д.А. Андриенко^{1,2}, С.Т. Суржиков¹

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1

²Московский Физико-Технический Институт, МО, г. Долгопрудный,
141700, пер. Институтский, 9

Аннотация

Целью данной работы является рассмотрение различных способов интегрирования уравнения переноса излучения в криволинейной цилиндрической геометрии. Вклад этой работы состоит в прояснение, какую именно численную ошибку вносит использование дивергентной и недивергентной конечно-разностных схем при решении в различных типах геометрии.

RADIATION OF HEAT TRANSFER EQUATION DISCRETIZATION IN CYLINDRICAL COORDINATES

The contribution of this work consists in comparing different methods of integrating the radiation heat transfer equation over elementary volume of the grid. The shown results make clearness what relative error is contributed using scheme is deduced from divergent or nondivergent form radiation heat transfer equation. Different types of geometries are explored: two dimensional cylindrical geometry with orthogonal grid, axisymmetric model nozzle with curvilinear grid and, finally, axisymmetric two dimensional task, modeling sphere. In the last case comparison with the ray tracing method was made.

1. ВВЕДЕНИЕ

При решении уравнения переноса излучения в цилиндрической геометрии конечно-разностным способом могут возникать значительные погрешности в окрестности оси симметрии из-за наличия в дивергенции плотности потока излучения слагаемых вида $1/r$. Учитывая этот факт, авторы этой работы сочли разумным продемонстрировать поведение решения уравнения переноса излучения в цилиндрической геометрии при наличии высокотемпературной области на оси симметрии, в геометрии, моделирующей сопло с тороидальным распределением температуры на его срезе и моделирование переноса излучения тонком высокотемпературном слое в окрестности поверхности сферы.

2. ДИФфуЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Уравнение переноса селективного излучения в нерассеивающей среде в стационарном случае имеет вид

$$\frac{dJ_\nu(s, \Omega)}{ds} + [\kappa_\nu(s) + \sigma_\nu(s)] J_\nu(s, \Omega) = J_\nu^{em}(s) + \frac{1}{4\pi} \sigma_\nu(s) \int_{\Omega'=4\pi} \gamma_\nu(s, \Omega, \Omega') J_\nu(s, \Omega') d\Omega' \quad (1)$$

В приближении локально-термодинамического равновесия (1) можно переписать в виде

$$\frac{dJ_\nu(s, \Omega)}{ds} + \kappa_\nu(s) J_\nu(s, \Omega) = \kappa_\nu(s) J_{b,\nu}(s) \quad (2)$$

Далее рассматривается приближение оптически "серой" среды с постоянным коэффициентом поглощения. В P_1 -приближении метода сферических гармоник (диффузионное приближение) уравнение (2) принимает вид

$$\text{div } \vec{W} = \kappa \left(\frac{4\pi J_b}{c} - U \right) \quad (3)$$

Недостатки P_1 -приближения хорошо известны: интенсивности излучения аппроксимируется всего лишь двумя членами и, соответственно, точность такого приближения невысока, в особенности в оптической прозрачной среде. Но, зачастую, точности диффузионного приближения хватает для оценки величины радиационных потоков к поверхности, и, учитывая что данный способ не является времени затратным, иногда выбор в пользу диффузионного приближения является лучшей альтернативой.

В настоящей работе уравнение (3) решается в различных типах геометрии (рис. 1–3). Двумерная цилиндрическая геометрия с высокотемпературной областью на оси симметрии, изображенная на рис. 1, выбрана с целью исследования влияние сильно неоднородного по пространству распределения излучения на конечную величину плотности радиационных потоков.

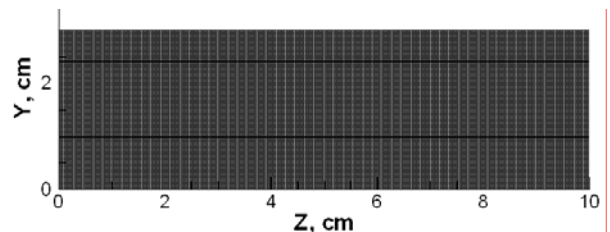


Рис. 1. Цилиндр

Цилиндрическое модельное сопло (рис. 2) с тороидальным распределением температуры выбрано для демонстрации влияние криволинейности сетки.

Последний тип цилиндрической геометрии (рис. 3) с серпообразным высокотемпературным слоем вблизи

критической линии тока выбран в соответствии с тестовой задачей № 3 [1].

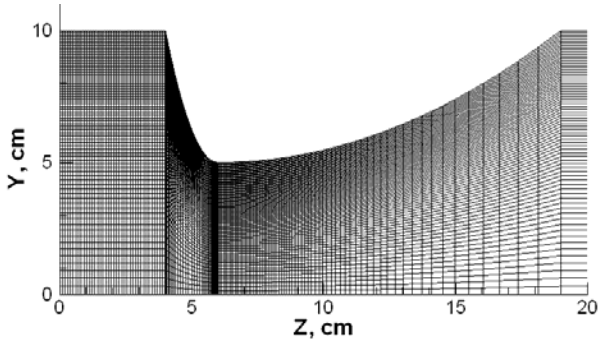


Рис. 2. Модельное сопло

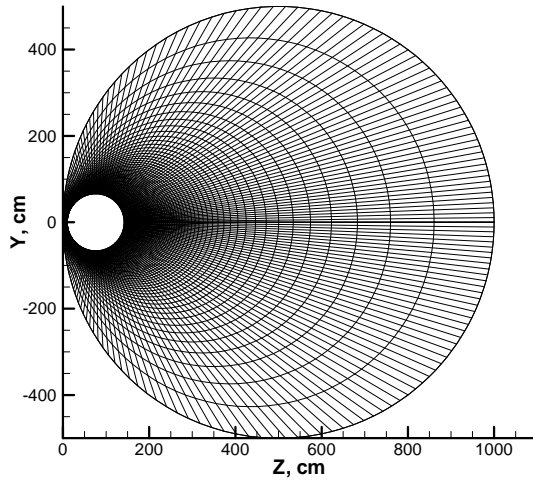


Рис. 3. Геометрия, моделирующая сферу

В двумерной цилиндрической геометрии (r, z) уравнение (3) принимает полудивергентный вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rD \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \kappa (U_b - U) \quad (4)$$

с ненулевой правой частью. Также возможно умножить уравнение (4) на переменную r для обхода возможной вычислительной неопределенности в окрестности $r = 0$. В этом случае уравнение (4) принимает форму, математически эквивалентную (4):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = k (rU_b - \Phi) - \frac{\partial (DU)}{\partial r}, \quad (5)$$

где $\Phi = Ur$. Как правило, геометрия космических аппаратов достаточно сложна, и для получения удовлетворительных результатов используются многоблочные сетки. Для упрощения и ортогонализации различных частей многоблочных сеток, применяется преобразование координат. Цилиндрические координаты (r, z) преобразуются в координаты (ξ, η) заранее известным преобразованием аналитическим преобразованием $\xi = \xi(r, z), \eta = \eta(r, z)$. Уравнение (4) в криволинейных координатах принимает вид [2]

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{D(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{D \xi_r}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{D \eta_r}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = k (U_b - U) \quad (6)$$

или, принимая во внимание (5),

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{D(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{D \xi_r}{J} \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{D \eta_r}{J} \Phi \right) \right] = \kappa r (U_b - \Phi) \quad (7)$$

3. ПРОЦЕДУРА ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Как было упомянуто выше, для составления конечно-разностной схемы используется метод конечных разностей. Вначале строится конечно-разностная схема для уравнения в некриволинейных координатах. В этих целях уравнение (4) интегрируется по цилиндрическому объему $V_0 = \int_{r_{-1/2}}^{r_{+1/2}} \int_{z_{j-1/2}}^{z_{j+1/2}} r dr dz$. В результате получается пятиточечная конечно-разностная схема

$$A_{i,j} U_{i-1,j} + B_{i,j} U_{i+1,j} + \bar{A}_{i,j} U_{i,j-1} + \bar{B}_{i,j} U_{i,j+1} - C_{i,j} U_{i,j} + F_{i,j} = 0, \quad (8)$$

$$A_{i,j} = \frac{P_0 r_{i-1/2,j} D_{i-1/2,j}}{P_-}, \quad B_{i,j} = \frac{P_0 r_{i+1/2,j} D_{i+1/2,j}}{P_+},$$

$$\bar{A}_{i,j} = \frac{z_{i,j-1/2} D_{i,j-1/2}}{Q_0 Q_-}, \quad \bar{B}_{i,j} = \frac{z_{i,j+1/2} D_{i,j+1/2}}{Q_0 Q_+},$$

$$C_{i,j} = A_{i,j} + \bar{A}_{i,j} + B_{i,j} + \bar{B}_{i,j} + k_{i,j}, \quad F_{i,j} = \kappa_{i,j} U_{b,i,j}, \quad (8.1)$$

где $D_{i\pm 1/2,j} = (\kappa_{i\pm 1,j} + \kappa_{i,j})/6$, $D_{i,j\pm 1/2} = (\kappa_{i,j\pm 1} + \kappa_{i,j})/6$,

$$r_{i\pm 1/2,j} = (r_{i\pm 1,j} + r_{i,j})/2, \quad Q_0 = (z_{i,j+1} - z_{i,j-1})/2,$$

$$Q_+ = (z_{i,j+1} - z_{i,j})/2, \quad Q_- = (z_{i,j} - z_{i,j-1})/2,$$

$$P_0 = (r_{i+1,j} - 2r_{i,j} + r_{i-1,j})/4,$$

$$P_+ = (r_{i+1,j} - r_{i,j})/2, \quad P_- = (r_{i,j} - r_{i-1,j})/2.$$

Соотношения (8) и (8.1) назовем *конечно-разностной схемой 1*. Элементарный объем в координатах (ξ, η) преобразуется следующим образом:

$$V_0 = \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} d\xi d\eta. \text{ Интегрируя уравнения (3) и (4) по}$$

этому объему, получаем две конечно разностные схемы для геометрии в координатах (ξ, η) . Для уравнения (3) коэффициенты в (8) принимают вид

$$A_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P^+ P} \frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i+1,j} + \frac{1}{P^+ P} \frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right], \quad (9.1)$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P^- P} \frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i-1,j} + \frac{1}{P^- P} \frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right], \quad (9.2)$$

$$\bar{A}_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Q^+ Q} \frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i-1,j} + \frac{1}{Q^+ Q} \frac{D(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right], \quad (9.3)$$

$$\bar{B}_{i,j} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{Q^- Q} \frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i+1,j} + \frac{1}{Q^- Q} \frac{D(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right], \quad (9.4)$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{J_{i,j} \tau} + A_{i,j} + B_{i,j} + \bar{A}_{i,j} + \bar{B}_{i,j} + \frac{k_{i,j}}{J_{i,j}}, \quad (9.5)$$

$$F_{i,j} = 2k_{i,j} \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1}}{4PQ} + (k_{i,j+1} - k_{i,j-1}) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{4PQ} + (k_{i+1,j} - k_{i-1,j}) \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{4PQ} + \frac{\lambda_{i,j}}{r_{i,j} J_{i,j}} \left[\frac{\xi_r (U_{i,j+1} - U_{i,j-1})}{2Q} + \frac{\eta_r (U_{i+1,j} - U_{i-1,j})}{2P} \right], \quad (9.6)$$

где $k_{i,j} = [D_{i,j} (\xi_{r,i,j} \eta_{r,i,j} + \xi_{z,i,j} \eta_{z,i,j})] / J_{i,j}$,
 $Q = (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}) / 2$, $P = (\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}) / 2$,
 $Q^+ = (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}) / 2$,
 $P^+ = (\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}) / 2$, $Q^- = (\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}) / 2$,
 $P^- = (\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) / 2$

Для уравнения (4) коэффициент $F_{i,j}$ в (9) принимает вид

$$F_{i,j} = 2k_{i,j} \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1}}{4PQ} + (k_{i,j+1} - k_{i,j-1}) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{4PQ} + (k_{i+1,j} - k_{i-1,j}) \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{4PQ} + \frac{1}{2Q} \left(\frac{\xi_{ri,j+1} \lambda_{i,j+1}}{J_{i,j+1}} \frac{U_{i,j+1}}{r_{i,j+1}} - \frac{\xi_{ri,j-1} \lambda_{i,j-1}}{J_{i,j-1}} \frac{U_{i,j-1}}{r_{i,j-1}} \right) + \frac{1}{2P} \left(\frac{\eta_{ri+1,j} \lambda_{i+1,j}}{J_{i+1,j}} \frac{U_{i+1,j}}{r_{i+1,j}} - \frac{\eta_{ri-1,j} \lambda_{i-1,j}}{J_{i-1,j}} \frac{U_{i-1,j}}{r_{i-1,j}} \right) \quad (10)$$

Соотношения (8), (9.1)–(9.6) и (8), (9.1)–(9.5), (10) назовем *конечно-разностная схема 2* и *конечно-разностная схема 3* соответственно.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для сравнения конечно-разностных схем 1–3 было выбрано три типа геометрии и сеток, изображенных на рис. 1–3.

4.1. Цилиндрическая двумерная геометрия

В первом случае, конечно-разностные схемы 1–3 тестируются на простой двумерной осесимметричной геометрии с высокотемпературной областью на оси симметрии. Температурное поле показано на рис. 4. Вычисления проводились для трех размерностей се-

ток: 50×150, 100×300 и 200×600. Сравнение результатов проводилось по срезу объемной плотности энергии излучения и аксиальной проекции плотности радиационного потока вдоль прямой $z = 5$ см.

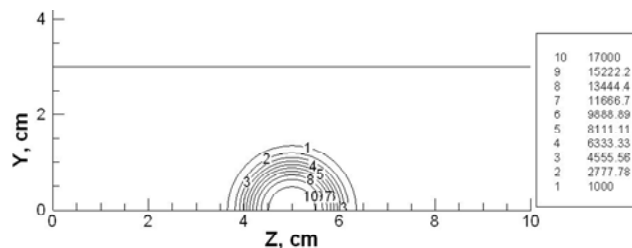


Рис. 4. Температурное поле

Вычисления проводились в предположении “серого” газа. Результаты, изображенные на рис. 5–8 соответствуют поглощению излучения в среде $\kappa = 10 \text{ см}^{-1}$. Сетки размерностью 100×300 и 200×600 узлов отображены на рис. 5, 6 и 7, 8 соответственно.

Относительная ошибка вычислялась как максимум относительной разности между текущим и предыдущим итерационным шагом.

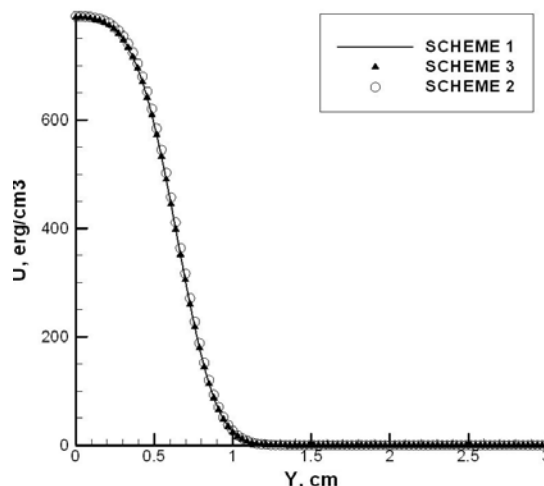


Рис. 5. Объемная плотность энергии излучения, 10^{-7} Дж/см³

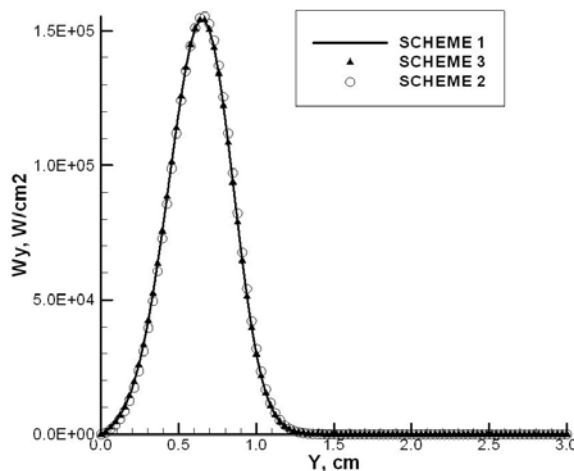


Рис. 6. Радиальная составляющая плотности радиационного потока, Вт/см²

Конечная относительная ошибка для всех результатов, представленных на рис.5 и 6 не хуже $5.0 \times 10^{-5} \%$. Относительная ошибка конечно-разностных схем 2 и 3 по отноше-

нию к конечно-разностной схеме 1 равна 7% и 3% для 100×300 узлов (рис. 7), 2.3% и 1.5% для 200×600 узлов (рис. 8) соответственно.

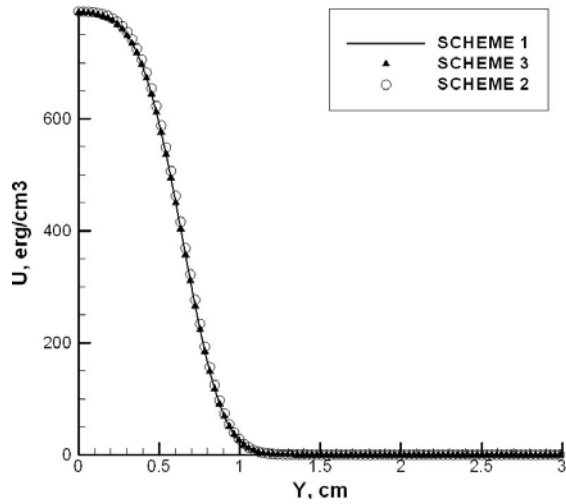


Рис. 7. Объемная плотность энергии излучения, 10^{-7} Дж/см³

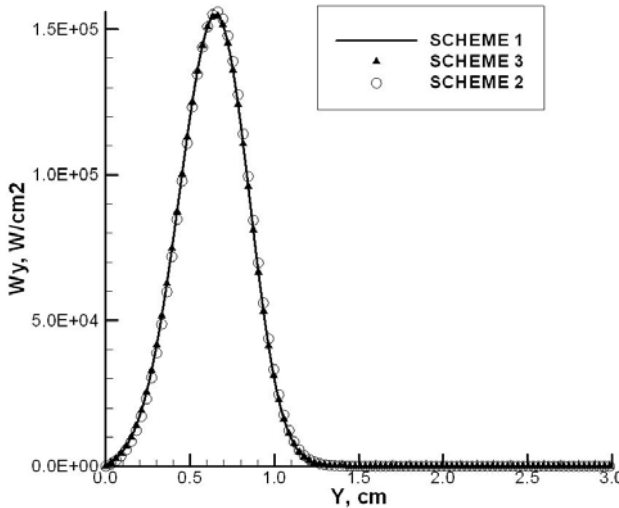


Рис. 8. Радиальная составляющая плотности радиационного потока, Вт/см²

Таким образом, мы можем заключить, что присутствует ненулевая разница между конечно-разностными схемами 1–3 на сетках фиксированной размерности, но эта разница стремится к нулю при конкретизации расчетной сетки.

4.2. Модельное сопло

Следующий тип геометрии, который выбран в качестве тестового для схем 1–3, был двумерное осесимметричное модельное сопло (рис. 2), внешняя граница которого была образована двумя отрезками прямых линий и двумя параболой. Как было упомянуто выше, этот тип геометрии был выбран с целью выяснения влияния криволинейности расчетной сетки на получаемое решение.

Температурное поле показано на рис. 9. Для обхождения возможных вычислительных особенностей в окрестностях “стыков” парабол, было предусмотрено аналитическое сгущение сетки. Вычисления были проведены для сеток размерностей 75×35, 150×75 и 300×150 узлов вдоль оси z и y соответственно.

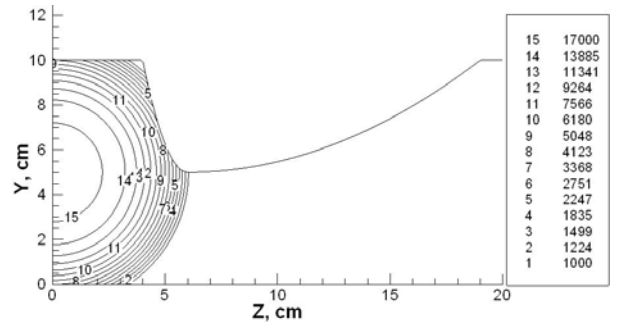


Рис. 9. Температурное поле, K

Сравнение результатов проводилось по величине объемной плотности энергии излучения и аксиальной проекции плотности радиационного потока, падающего на внешнюю границу сопла. На рис. 10–16 представлены сравнительные графики объемной плотности энергии излучения и радиальной проекции плотности потока излучения для сеток различной степени подробности. На рис. 10–16 сплошная линия с кругами соответствует конечно-разностной схеме 2, треугольники – конечно-разностной схеме 3. Расчеты проведены при коэффициенте поглощения $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$.

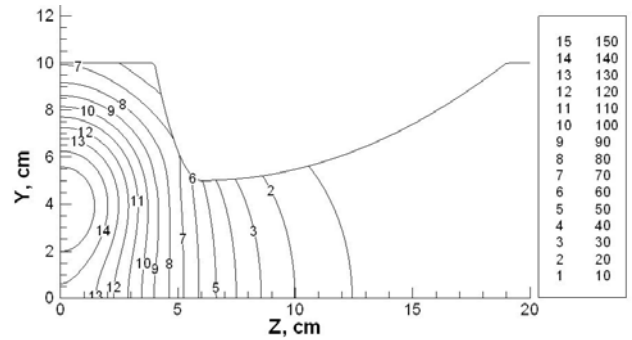


Рис. 10. Объемная плотность энергии излучения, 10^{-7} Дж/см³, $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$

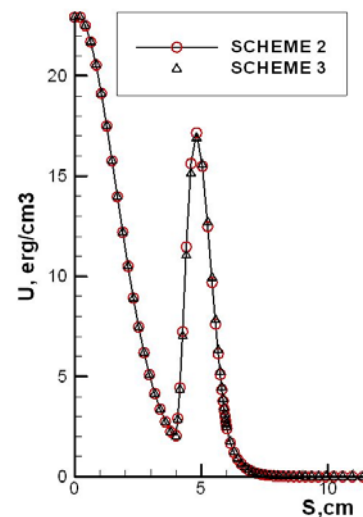


Рис. 11. Объемная плотность энергии излучения, 10^{-7} Дж/см³, сетка 75×35

Из-за наличия криволинейности в этом типе сетки, конечно-разностная схема 1 больше не применима. Конечно-разностные схемы 2 и 3 сравнивались по значению объемной плотности энергии излучения.

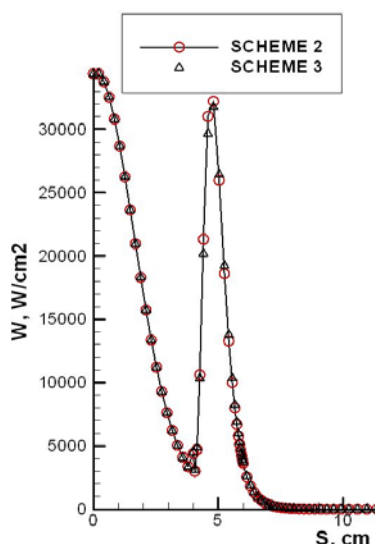


Рис. 12. Радиальная составляющая плотности радиационного потока, Вт/см², сетка 75×35

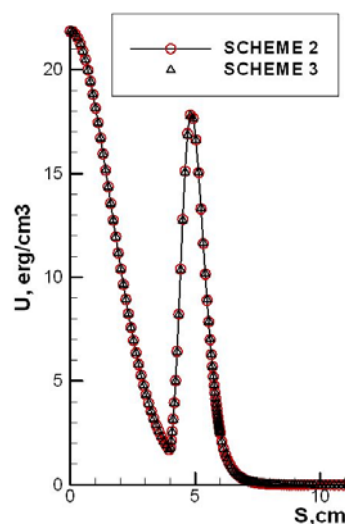


Рис. 15. Объемная плотность энергии излучения, 10⁻⁷ Дж/см³, сетка 300×150

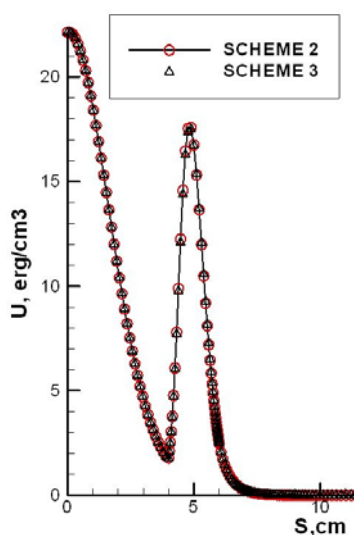


Рис. 13. Объемная плотность энергии излучения, 10⁻⁷ Дж/см³, сетка 150×75

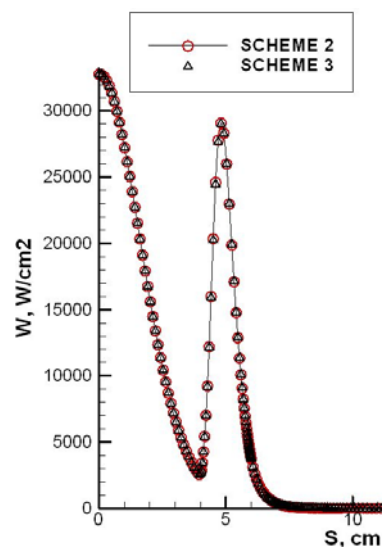


Рис. 16. Радиальная составляющая плотности радиационного потока, Вт/см², сетка 300×150

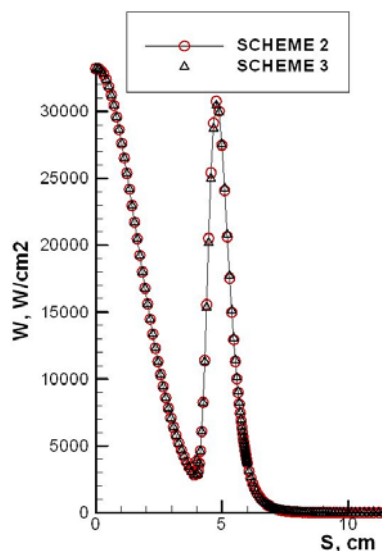


Рис. 14. Радиальная составляющая плотности радиационного потока, Вт/см², сетка 150×75

Относительное различие конечно-разностной схемы 2 по отношению к конечно-разностной схеме 3 составила 5.6% для сетки 75×35 узлов (рис. 11), 2.4% для сетки 150×75 узлов (рис. 13) и 0.2% для сетки 300×150 узлов (рис. 15) соответственно. Таким образом, мы можем заключить, что конечно-разностные схемы 2 и 3 при наличии криволинейности в схеме дают удовлетворительную относительную ошибку только на подробных расчетных сетках. Более того, конечно-разностная схема 3 области “стыков” блоков расчетной сетки дает более гладкие результаты, чем схема 2.

4.3. Криволинейная геометрия, моделирующая сферу

Тип геометрии и расчетная сетка показаны на рис. 3. Размерность сетки 61×141. Распределение температуры показано на рис. 17. Объемная плотность энергии излучения, вычисленная при постоянном по пространству коэффициенте поглощения $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$, изображена на рис. 18.

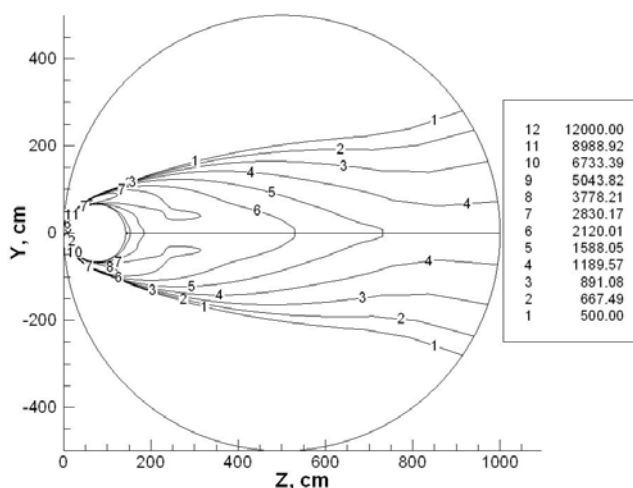


Рис. 17. Температурное поле, К

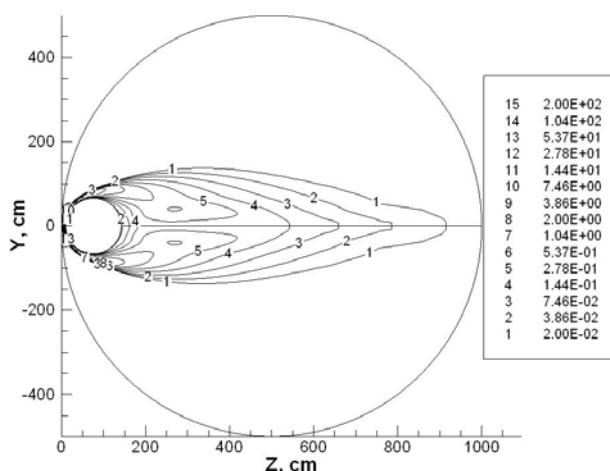


Рис. 18. Объемная плотность энергии излучения, эрг/см³, $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$

Сравнение результатов конечно-разностных схем 2 и 3 было проведено для плотности радиационного потока, падающего на поверхность сферы (рис. 19).

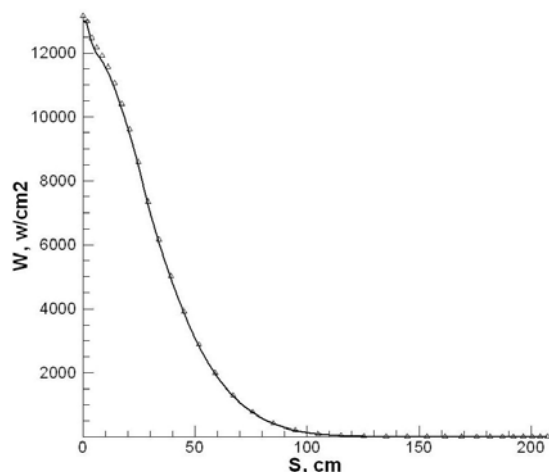


Рис. 19. Плотность радиационного потока, Вт/см², сетка 61×141

Максимальная относительная ошибка достигается в передней критической точке ($7 \times 10^{-3} \%$) и по абсолютной величине достигает 200 Вт. Полученный результат был сопоставлен с результатом метода дискретных направлений.

Данное сравнение показано на рис. 20. Максимальная относительная ошибка составила 14.8%.

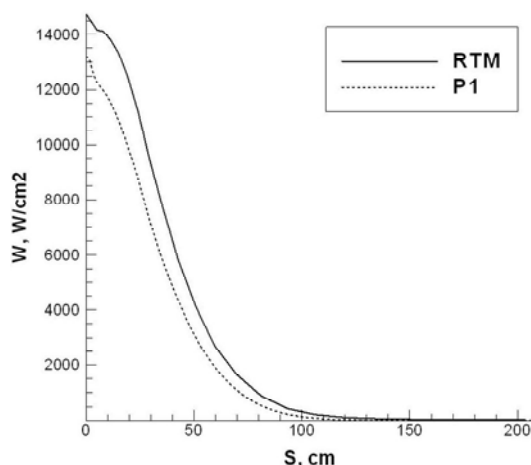


Рис. 20. Плотность радиационного потока, Вт/см², сетка 61×141. Сравнение метода дискретных направлений и P₁-приближения МСГ

Мощность радиационного тепловыделения изображена на рис. 21. Видно, что подавляющая часть тепла выделяется в приграничном ударном слое – примерно 100 Вт/см². Непосредственно за ударным слоем тепловыделение, обусловленное радиационными процессами, меняет знак.

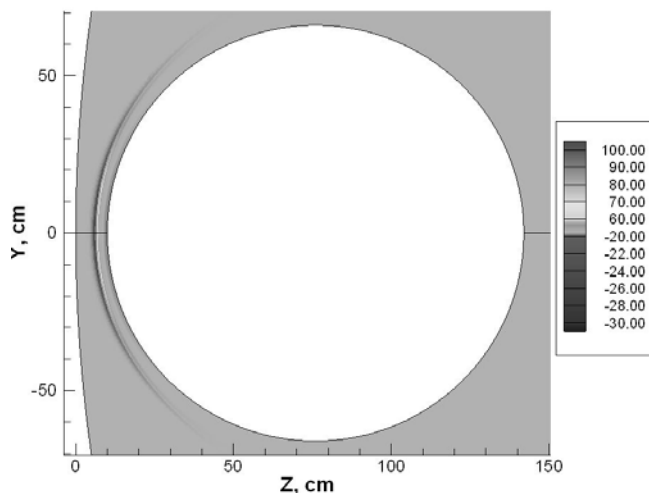


Рис. 21. Мощность тепловыделения в объеме, Дж/см³, $\kappa = 1 \text{ см}^{-1}$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные вычисления показали, что существует различие между результатами, к которым приводит использование различных конечно-разностных схем, соответствующих дивергентной и недивергентной формам уравнения переноса излучения в цилиндрической геометрии. Относительная ошибка уменьшается при увеличении детализации сетки. Таким образом, очень важно определить размерность сетки, при котором влияние недивергентности конечно-разностной схемы будет не критичным.

Было замечено, что конечно-разностная схема со слагаемым вида $1/r$ в свободном члене имеет существенно меньшую скорость сходимости по сравнению с

конечно-разностной схемой, которая выведена при умножении уравнения переноса излучения на расстояние до оси симметрии, в особенности на детальных сетках.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в Лаборатории радиационной газовой динамики ИПМех РАН и на базовой кафедре МФТИ «Физическая и химическая механика» в рамках проекта РФФИ № 07-01-00133 (разработка пространственной модели движения химически реагирующего газа), в рамках международного Российско-Итальянского проекта РФФИ № 09-08-92422-КЭа (разработка компьютерных радиационно-столкновительных моделей) и программы сотрудничества РАН и CNR, а также в рамках Программы фундаментальных исследований РАН (создание моделей физико-химической кинетики высокотемпературных газовых потоков) и Программы министерства образования и науки Российской Федерации РНПВШ 2.1.1/4693 (создание гибридных радиационно-столкновительных моделей аэрофизики).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andrienko, D.A., Surzhikov, S.T., Two dimensional radiation heat transfer to Martian spherical space, Proceedings of third workshop Radiation of high temperature gases, Iraklion, Greece, September 30 – October 4, on CD, 2008.
2. Anderson, D. A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., Computational Fluid mechanics and heat transfer/ Hemisphere Pub. Corp., Vol. 1, pp 297–300, 1984.
3. Суржиков С.Т., Тепловое излучение газов и плазмы/ М., изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, с. 297–300, 2004.