

## ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ

И.Э.Иванов<sup>1</sup>, И.А.Крюков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет,  
Москва, 119992, Воробьевы горы, 1*

<sup>2</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,  
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1*

### Аннотация

Работа посвящена численному моделированию динамики двухфазной среды, на основе математической модели, предложенной Saruel и Abgrall [5]. При описании движения многофазной среды в полной мере реализуется подход многоскоростных, многотемпературных взаимопроникающих континуумов [1], при котором каждая фаза описывается набором уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии для парциальных величин и еще одно уравнение для описания эволюции объемной доли фазы. Получаемая система уравнений имеет гиперболический тип, и решается с использованием численного метода Годунова повышенного порядка точности. Приводятся результаты тестирования алгоритма и численного моделирования задач, имеющие фундаментальное и практическое значение, в которых в течении на макроуровне присутствуют границы раздела фаз.

### NUMERICAL ALGORITHM OF MODELING OF THE TWO-PHASE FLOW CONTAINING INTERPHASE BOUNDARIES

I.E. Ivanov<sup>1</sup>, I.A. Kryukov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Russia, Moscow, 119991*

<sup>2</sup> *Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow, 119526*

This article is devoted to numerical modeling of the two-phase dynamics, on the basis of a Saruel and Abgrall [5] model. At the description of the multiphase flows environment the approach of multivelocity, multipressure, multi-temperature continuums [1] at which each phase is described. The system of equations has hyperbolic type, and solves with usage of the numerical method of Godunov of the high order of accuracy. Testing of algorithm and numerically modeling the problems having fundamental and practical value is held. Regarding mathematical modeling problems at which in flow at macrolevel there are interphase boundaries of section of phases were considered.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время вопросы математического и физического моделирования процессов, протекающих при течении двухфазных сред, приобретают особую актуальность. Задача физико-математического описания этих процессов является достаточно сложной [1]. Сложность состоит в необходимости описания нестационарных явлений тепло и массопереноса, нестационарного

движения двухфазных сред с пренебрежимым объемным содержанием каждой фазы [2]. В настоящей работе двухфазная среда описывается как совокупность двух континуумов, каждый из которых характеризуется своим давлением, скоростью потока и температурой. Для каждого континуума (фазы) записываются уравнения неразрывности, движения, сохранения энергии, а также дополнительное уравнение, описывающее эволюцию объемной концентрации фазы.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial y} &= \mu(P_g - P_l) - \sigma(T_g - T_l)/k, \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g v_g}{\partial y} &= -v \frac{\alpha_g \rho_g v_g}{y}, \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g v_g}{\partial y} &= -v \frac{\alpha_g \rho_g u_g v_g}{y} + P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g v_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g v_g}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g v_g^2 + \alpha_g P_g)}{\partial y} &= -v \frac{\alpha_g \rho_g v_g^2}{y} + P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial y} + \lambda(v_l - v_g), \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \frac{\partial u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g)}{\partial x} + \frac{\partial v_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g)}{\partial y} &= -v \frac{(\alpha_g P_g + \alpha_g \rho_g E_g)}{y} + P_i U_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + P_i V_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial y} + \\ &+ \lambda U_i (u_l - u_g) + \lambda V_i (v_l - v_g) - \mu P_i (P_g - P_l) - \sigma (T_g - T_l), \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l v_l}{\partial y} &= -v \frac{\alpha_l \rho_l v_l}{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l v_l}{\partial y} &= -v \frac{\alpha_l \rho_l u_l v_l}{y} + P_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} - \lambda (u_l - u_g), \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l v_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l v_l}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l v_l^2 + \alpha_l P_l)}{\partial y} &= -v \frac{\alpha_l \rho_l v_l^2}{y} + P_l \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} - \lambda (v_l - v_g), \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} + \frac{\partial u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l)}{\partial x} + \frac{\partial v_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l)}{\partial y} &= -v \frac{(\alpha_l P_l + \alpha_l \rho_l E_l)}{y} + \\ &+ P_l U_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + P_l V_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} - \lambda U_i (u_l - u_g) - \lambda V_i (v_l - v_g) + \mu P_i (P_g - P_l) + \sigma (T_g - T_l) \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения полученной гиперболической системы уравнений используется метод Годунова повышенного порядка точности, в котором задача Римана решается методом HLL.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

В настоящей работе в качестве базовой математической модели двухфазной среды выбрана система уравнений (1), предложенная Drew [3] и доработанная Bayer и Nunziato [4], а так же Saurel и Abgrall [5], в которой каждая фаза описывается отдельно своей подсистемой уравнений. Система (1) описывает двумерное плоское ( $\nu = 0$ ) или осесимметричное ( $\nu = 1$ ) нестационарное течение двухфазной среды.

В системе (1)  $\alpha_g, \alpha_l$  – объемные доли фаз (газообразной и жидкой),  $\alpha_g + \alpha_l = 1$ ;  $P_k$  – давление;  $\rho_k$  – плотность;  $u_k, v_k$  – компоненты вектора скорости;  $T_k$  – температура;  $E_k$  – полная удельная энергия,  $E_k = e_k + 1/2 u_k^2$ ,  $e_k$  – внутренняя удельная энергия. Система уравнений (1) дополнена калорическими и термическими уравнениями состояния для каждой фазы в форме:

$$e_k = \frac{P_k + \gamma P_{k\infty}}{(\gamma_k - 1) \rho_k}, \text{ где } \frac{P_k}{\rho_k} = R_k T_k, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

$c_p, c_v$  – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме;  $R_k$  – газовая постоянная;  $\lambda, \mu, \sigma$  – коэффициенты релаксации скорости, давления, температуры соответственно;  $k$  – индекс:  $k = g, l$ . Давление  $P_i$  и скорость  $U_i$  представляют собой усредненные величины межфазового давления и скорости по контрольному объему двухфазного течения, содержащему поверхность раздела фаз. Для определения этих величин используются дополнительные замыкающие соотношения:

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{k=g,l} \alpha_k P_k, \quad U_i = \sum_{k=g,l} \alpha_k \rho_k u_k / \sum_{k=g,l} \alpha_k \rho_k \\ k &= \frac{\sum_{k=g,l} (\rho_k c_k^2 / \alpha_k)}{\sum_{k=g,l} (\Gamma_k / \alpha_k)} - \frac{\sum_{k=g,l} (\Gamma_k P_k / \alpha_k)}{\sum_{k=g,l} (\Gamma_k / \alpha_k)}, \\ \Gamma_k &= \frac{1}{\rho_k} \left( \frac{\partial P_k}{\partial e_k} \right)_{\rho_k} \end{aligned}$$

Данная математическая модель включает восемь уравнений, полученных из законов сохранения для каждой фазы и дополненных девятым уравнением для эволюции объемной доли. Эта модель применима как для смесей, а так и для чистых газов. Предполагается,

что двухфазный поток состоит из газа (индекс  $g$ ) и жидкости (индекс  $l$ ). Левые части последних восьми уравнений системы (1) – обычные конвективные слагаемые. В правой части тех же самых уравнений находятся слагаемые, относящиеся к неконсервативным членам  $P_i (\partial \alpha_g / \partial x)$  и  $P_i U_i (\partial \alpha_g / \partial x)$ . Давления газа и второй фазы могут быть найдены из уравнений состояния. Система (1) состоит из гиперболической части, дополненной членами релаксации давления и членами релаксации скорости для учета межфазного взаимодействия. Члены, связанные с релаксацией давления, описывают микроскопическое движение среды за волнами давления, а члены, связанные с релаксацией скорости, описывают действие сил сопротивления в двухфазной смеси.

## 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

### 3.1. Численная схема для одномерной нестационарной системы

Математический анализ гиперболической части системы (1), записанной для случая одной пространственной переменной, проведен в [6], где определены ее собственные значения:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{int}} &= V_{\text{int}}, \quad \lambda_g^+ = u_g + c_g, \\ \lambda_g^- &= u_g - c_g, \quad \lambda_g^0 = u_g, \\ \lambda_l^+ &= u_l - c_l, \quad \lambda_l^- = u_l - c_l, \quad \lambda_l^0 = u_l \end{aligned}$$

При этом  $c_k^2 = \left( \frac{P_k}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \Big|_{P_k} \right) / \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \Big|_{\rho_k}$  представляет собой скорость звука соответствующей фазы  $k = g, l$ . Так как собственные значения действительны и различны, эта подсистема системы (1) является гиперболической (однако не дивергентной).

**Метод расщепления системы по физическим процессам.** Математическая модель, описывающая динамику двухфазной смеси без учета релаксаций давления, скорости и температуры, является гиперболической. Поэтому для решения используется схема Годунова. Однако гиперболическая система включает неконсервативные члены и одно неконсервативное уравнение (уравнение эволюции объемной фракции). Их решение сопряжено с определенными трудностями.

В целом, согласно методу расщепления по физическим процессам решение получается как результат действия последовательности операторов [11,12]:

$$Q_i^{n+1} = L_s^{\Delta t} L_h^{\Delta t} Q_i^n,$$

где  $L_h^{\Delta t}$  обозначает гиперболический оператор, содержащий неконсервативные члены, и  $L_s^{\Delta t}$  – оператор интегрирования для членов источника и релаксации;

$Q^n, Q^{n+1}$  – векторы зависимых переменных на старом и новом временном слое.

Таким образом, алгоритм расчета решения на новом временном слое в данном методе состоит из четырех шагов:

- 1) расчет газодинамического процесса;
- 2) расчет релаксации скорости;
- 3) расчет релаксации давления;
- 4) расчет релаксации температуры.

В настоящей работе газодинамическая часть системы исходных уравнений аппроксимируется по методу Годунова [7,8,2] с приближенным решением задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) по методу HLL [9] и HLLC.

Алгоритмы расчета газодинамического процесса, релаксации скорости, давления и температуры, используемые в данной работе, приведены в [2].

**Алгоритм расчета газодинамической части системы.** На газодинамическом шаге общего алгоритма в случае одной пространственной координаты решается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = H(Q) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x},$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g \\ \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_g \rho_g E_g \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_l \rho_l E_l \end{pmatrix}, \quad F(Q) = \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g P_g \\ u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g P_g) \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l P_l \\ u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l P_l) \end{pmatrix},$$

$$H(Q) = (0 \quad P_i \quad P_i U_i \quad 0 \quad -P_i \quad -P_i U_i)^T$$

Численная схема, записанная в потоковой форме, выглядит следующим образом:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \Delta t H(Q_j^n) \Delta \quad (3)$$

где  $Q_j^n$  – консервативные переменные на старом слое, а  $Q_j^{n+1}$  – на новом;  $F_{j+1/2}^n, F_{j-1/2}^n$  – потоки консервативных переменных через  $j-1/2$  и  $j+1/2$  боковые грани  $j$ -й расчетной ячейки. В (3)

$$\Delta = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{S_{j+1/2}^+ \alpha_j^n - S_{j+1/2}^- \alpha_{j+1}^n}{S_{j+1/2}^+ - S_{j+1/2}^-} - \frac{S_{j-1/2}^+ \alpha_{j-1}^n - S_{j-1/2}^- \alpha_j^n}{S_{j-1/2}^+ - S_{j-1/2}^-} \right] \quad (4)$$

В соответствии с [9] поток имеет вид

$$F_{j+1/2} = \frac{S_{j+1/2}^+ F_j - S_{j+1/2}^- F_{j+1} + S_{j+1/2}^+ S_{j+1/2}^- (Q_{j+1} - Q_j)}{S_{j+1/2}^+ - S_{j+1/2}^-}$$

Уравнение эволюции объемной концентрации газа аппроксимируются следующим образом:

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \times \left\{ \frac{\left[ u_j^n (S_{j+1/2}^+ \alpha_j^n - S_{j+1/2}^- \alpha_{j+1}^n) + S_{j+1/2}^+ S_{j+1/2}^- (\alpha_{j+1}^n - \alpha_j^n) \right]}{S_{j+1/2}^+ - S_{j+1/2}^-} - \frac{\left[ u_j^n (S_{j-1/2}^+ \alpha_{j-1}^n - S_{j-1/2}^- \alpha_j^n) + S_{j-1/2}^+ S_{j-1/2}^- (\alpha_j^n - \alpha_{j-1}^n) \right]}{S_{j-1/2}^+ - S_{j-1/2}^-} \right\},$$

где  $S^+ = \max\{0, \lambda_l^+, \lambda_g^+\}$ ,  $S^- = \min\{0, \lambda_l^-, \lambda_g^-\}$ .

**Алгоритм расчета релаксации скорости.** Для нахождения параметров течения на этапе релаксации скорости используется система

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_g \alpha_g}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_g \alpha_g u_g}{\partial t} = \lambda (u_l - u_g) \\ \frac{\partial \rho_g \alpha_g E_g}{\partial t} = \lambda V_i (u_l - u_g) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_l \alpha_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_l \alpha_l u_l}{\partial t} = -\lambda (u_l - u_g) \\ \frac{\partial \rho_l \alpha_l E_l}{\partial t} = -\lambda V_i (u_l - u_g) \end{cases}$$

Здесь возможны два расчетных случая. Первый – связан с расчетом двухфазного потока, в котором в каждой расчетной ячейке присутствует большое количество границ раздела фаз и коэффициент межфазного трения  $\lambda$  принимает конечное значение. Тогда для решения системы (5) может быть использованы различные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, например, метод Эйлера:

$$u_g^{n+1} = u_g^n + \lambda \Delta t (u_l^n - u_g^n) / (\alpha_g^n \rho_g^n),$$

$$u_l^{n+1} = u_l^n - \lambda \Delta t (u_l^n - u_g^n) / (\alpha_l^n \rho_l^n),$$

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \lambda U_i \Delta t (u_l^n - u_g^n) / (\alpha_i^n \rho_i^n) \quad (6)$$

В случае, когда рассматривается двухжидкостное течение с одной границей раздела сред, разделяющей чистые жидкости, в расчетных ячейках, содержащих границу раздела, значение коэффициента  $\lambda \rightarrow \infty$ . Таким образом, течение в районе границы раздела можно рассматривать как равновесное по скорости, а с учетом того, что и в ячейках содержащих почти чистую фазу, скоростным отставанием можно пренебречь, равновесный (односкоростной) режим будет характерен во всей области. Для нахождения значений зависимых переменных на новом временном слое используется следующий алгоритм. Комбинация уравнений массы и момента для каждой фазы дает дифференциальную систему

$$u = u_g = u_l = \frac{\alpha_g \rho_g u_{g0} + \alpha_l \rho_l u_{l0}}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l}$$

Внутренняя энергия каждой фазы записывается как

$$e_k = e_{k0} + \frac{1}{2}(u_k - u_{k0})(U_i^n - u_{k0})$$

**Алгоритм расчета релаксации давления.** Для нахождения параметров течения на этапе релаксации давления используется система

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \mu(P_g - P_l), \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_g \alpha_g}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_g \alpha_g u_g}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_g \alpha_g E_g}{\partial t} = \mu P_l (P_l - P_g) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_l \alpha_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_l \alpha_l u_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_l \alpha_l E_l}{\partial t} = -\mu (P_l - P_g) \end{cases}$$

Если  $\mu$  ограничено, то аппроксимация (7) по методу Эйлера выглядит так

$$\begin{aligned} \alpha_g^{n+1} &= \alpha_g^n + \mu \Delta t (P_g^n - P_l^n), \\ E_g^{n+1} &= E_g^n - \mu \Delta t (P_g^n - P_l^n) / (\alpha_g^n \rho_g^n), \\ \alpha_l^{n+1} &= 1 - \alpha_g^{n+1}, \\ E_l^{n+1} &= E_l^n - \mu \Delta t (P_l^n - P_g^n) / (\alpha_l^n \rho_l^n) \end{aligned} \quad (8)$$

Однако если  $\mu \rightarrow \infty$ , то  $P_l^{n+1} = P_g^{n+1} = P_l^{n+1} = P$ . Вследствие этого система (7) приводится к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2\rho_g^{n+1} \rho_g^n \left[ \frac{P^{n+1} + \gamma_g P_{g\infty}}{(\gamma_g - 1) \rho_g^{n+1}} - e_g^n \right] - (P^{n+1} + P_l) (\rho_g^{n+1} - \rho_g^n) = 0 \\ 2\rho_l^{n+1} \rho_l^n \left[ \frac{P^{n+1} + \gamma_l P_{l\infty}}{(\gamma_l - 1) \rho_l^{n+1}} - e_l^n \right] - (P^{n+1} + P_l) (\rho_l^{n+1} - \rho_l^n) = 0 \\ \frac{\alpha_g^n \rho_g^n}{\rho_g^{n+1}} + \frac{\alpha_l^n \rho_l^n}{\rho_l^{n+1}} = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Данная система решается относительно переменных  $\rho_g^{n+1}$ ,  $\rho_l^{n+1}$ ,  $P^{n+1}$  методом исключения неизвестных и сведения к квадратному уравнению.

**Алгоритм расчета релаксации температуры.** Для нахождения параметров течения на этапе релаксации температуры используется система

$$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = -\sigma \frac{(T_g - T_l)}{k}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_g \alpha_g}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_g \alpha_g u_g}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_g \alpha_g E_g}{\partial t} = \sigma (T_l - T_g) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho_l \alpha_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_l \alpha_l u_l}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho_l \alpha_l E_l}{\partial t} = -\sigma (T_l - T_g) \end{cases}$$

Если  $\mu$  ограничено, то аппроксимация (10) по методу Эйлера выглядит так

$$\begin{aligned} \alpha_g^{n+1} &= \alpha_g^n - \sigma \Delta t (T_g^n - T_l^n) / (k_g^n), \\ E_g^{n+1} &= E_g^n - \sigma \Delta t (T_g^n - T_l^n) / (\alpha_g^n \rho_g^n), \\ E_l^{n+1} &= E_l^n + \sigma \Delta t (T_g^n - T_l^n) / (\alpha_l^n \rho_l^n) \end{aligned} \quad (11)$$

В случае мгновенной температурной релаксации, т.е. при  $\sigma \rightarrow \infty$ , для нахождения внутренней энергии, плотности и объемной концентрации каждой фазы решается система трех нелинейных уравнений.

### 3.2. Математическая модель и численная схема для двумерной нестационарной системы

В двумерном случае для решения системы уравнений (1), используется метод расщепления по координатам [11,12]. В этом случае двумерная система расщепляется на две одномерные подсистемы, которые решаются в определенной последовательности при помощи разработанного метода  $Q_i^{n+1} = L_x^{\Delta t} L_y^{\Delta t} Q_i^n$ , где  $L_x^{\Delta t}$  обозначает оператор, который решает одномерную задачу по  $x$ , и  $L_y^{\Delta t}$  - оператор, который решает одномерную задачу по  $y$ .

С помощью разработанного алгоритма проведено решение тестовых задач и исследование большого количества двухфазных течений с большим объемным содержанием второй фазы, в том числе проведено моделирование некоторых физических экспериментов с двухфазными течениями [2].

Дальнейшее совершенствование алгоритма возможно в переходе к многоуровневого подходу [16] и неструктурированным сеткам [17,18].

## 4. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

### 4.1. Распад разрыва в ударной трубе

Рассматривается тестовая задача [5] о распаде разрыва в канале постоянной ширины, где слева от разрыва находится вода под большим давлением с параметрами:

$$\begin{aligned} P_g = P_l = 10^9 \text{ Па}, \quad U_g = U_l = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_g = 50 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_l = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \alpha_g = 10^{-8}, \quad \alpha_l = 1 \div 10^{-8}, \quad \gamma_g = 1.4, \quad \gamma_l = 4.4, \end{aligned}$$

а справа от разрыва находится воздух при нормальных условиях:

$$\begin{aligned} P_g = P_l = 10^5 \text{ Па}, \quad U_g = U_l = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_g = 50 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_l = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \alpha_g = 1 \div 10^{-8}, \quad \alpha_l = 10^{-8}, \quad \gamma_g = 1.4, \quad \gamma_l = 4.4. \end{aligned}$$

Таким образом, и вода и воздух моделировались двухфазной смесью с малым объемным содержанием второй фазы. Использовалось двухчленное уравнение состояния:

$$P = (\gamma - 1) \rho e - \gamma P_{\infty}, \quad P_{g\infty} = 0 \text{ Па}, \quad P_{l\infty} = 6 \times 10^8 \text{ Па}$$

Задавалось  $N=1000$  ячеек вдоль пространственной координаты и интервал по времени  $\Delta t = 0.00002 \Delta x$ , где  $\Delta x = 1/N$ , и разрыв параметров располагался между 700 и 701 расчетными ячейками. Полученные распределения давления, скорости и плотности (рис. 1) хорошо соответствуют точному решению.

### 4.2. Численное моделирование эксперимента Rogue [15]

Рассматривается вертикальная ударная труба, заполненная воздухом при нормальных условиях (рис.2). На высоте ( $x_0 = 0.19\text{м}$ ) расположена область толщиной 2 см, заполненная твердыми шариками нейлона диаметром 2 мм. Плотность нейлона  $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$ .

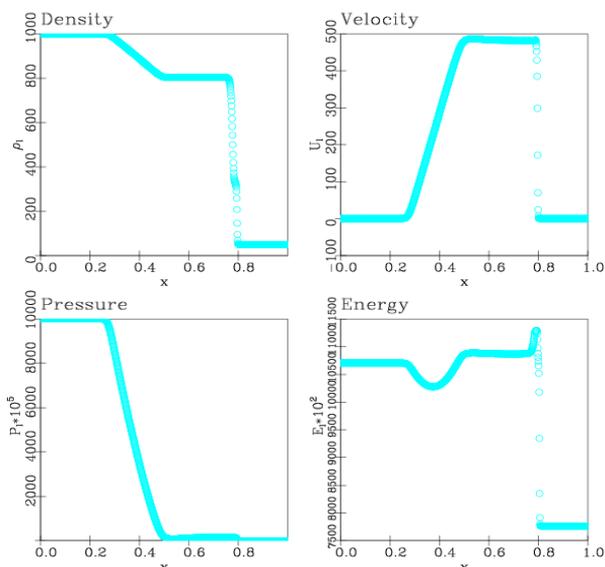


Рис. 1. Зависимость от координаты  $x$  параметров течения смеси в ударной трубе

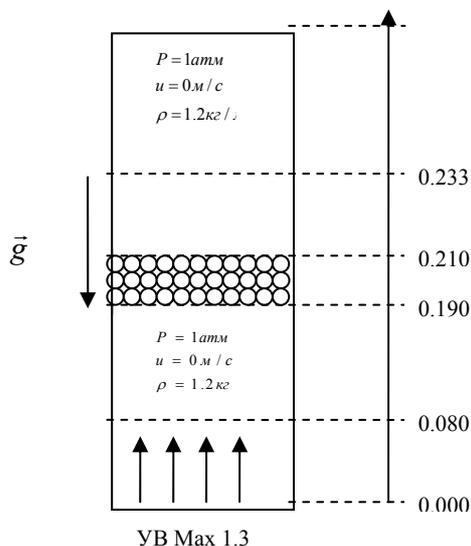


Рис. 2. Схема эксперимента Rogue [15]

Упаковка шариков такова, что объемная доля воздуха в засыпке 0.35. Параметры невозмущенного воздуха соответствуют нормальным условиям: давление  $p = 10132 \text{ Па}$  (1 атм), плотность  $\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3$ , скорость  $u = 0 \text{ м/с}$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Снизу вверх движется ударная волна с числом Маха  $M = 1.3$ . Параметры газа (воздуха) за ударной волной: давление  $p = 18289 \text{ Па}$ , плотность  $\rho = 1.81883 \text{ кг/м}^3$ , скорость  $u = 152.0744 \text{ м/с}$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . В начальный момент времени фронт ударной волны имеет координату  $x = 0$ . В ударной трубе расположены два датчика регистрирующие давление – один на расстоя-

нии 11 см до передней границы зоны засыпки ( $x = 0.08$ ), другой на расстоянии 4.3 см после ( $x = 0.233$ ).

Падающая ударная волна взаимодействует с границей раздела (контактный разрыв с начальной нулевой скоростью) отделяющей область “чистого” газа и область засыпки шариков (пористая среда). В результате взаимодействия образуется отраженная ударная волна, которая движется навстречу потоку к входному сечению, и проходящая волна, которая вначале движется по двухфазной области (пористой среде), а затем выходит в область “чистого” газа.

Давление воздуха за отраженной ударной волной и, следовательно, перед нижней границей области засыпки – 3 атм, давление за проходящей волной и, следовательно, над верхней границей области засыпки – приблизительно 1.2 атм. Таким образом “пробка” из шариков засыпки испытывает перепад давления около 1.8 атм и под действием этого перепада начинает двигаться вверх. Одновременно газ, увлекаемый проходящей ударной волной, движется относительно исходно покоящихся частиц засыпки и сам увлекает эти частицы за счет силы вязкого трения. Оба эти эффекта приводят к тому, что возникает двухфазное (газ + частицы) движение в сторону второго датчика давления (увеличения координаты  $x$ ), при этом область, занятая шариками, смещается и увеличивается в размерах (область засыпки “размазывается”). Следует отметить, что не существует аналитического решения, однако сам эксперимент проведен очень тщательно и результаты (показания датчиков давления) приведены весьма подробно. Основные вычислительные трудности связаны с расчетом границ раздела между чистым газом и двухфазной средой, а так же с большой объемной концентрацией твердой фазы.

В данной работе вычислительный эксперимент был проведен с помощью разрабатываемого метода расчета двухжидкостных течений. Для того чтобы можно все течение описывать гиперболической системой уравнений, предполагалось, что вторая фаза (твердые частицы) является слабо сжимаемой, и уравнения состояния для нее принимались как у воды. Вся область предполагалась заполненной двухфазной средой, однако там, где предполагался “чистый” газ значение объемной доли частиц принималось  $10^{-8}$ . Сила вязкого сопротивления определялась по формуле

$$F_d = \lambda_d (u_l - u_g),$$

где  $\lambda_d = \frac{3}{4} C_d \frac{\rho_g}{d_s} (1 - \alpha_g) |u_g - u_l|$ ;  $C_d = 0.6$ ;  $d_s$  – диаметр частиц.

Схематизированная  $x-t$  диаграмма распространения газодинамических разрывов в этой задаче показана на рис. 3.

Сравнение результатов расчетов, проведенных на разностной сетке из 1000 ячеек, и результатов экспериментов [6] представлено на рис. 4.

Анализ результатов расчетов показывает, что распределение давление по времени на первом датчике очень хорошо совпадает с экспериментальными данными почти во всем диапазоне времен. В момент времени  $t = 0.183 \text{ мс}$  датчик 1 регистрирует прохождение

падающей ударной волны, а в момент  $t = 0.787$  мс прохождение отраженной ударной волны. Давление воздуха за отраженной волной в момент прохождения датчика достигает 2.964 атм и затем медленно снижается при разгрузке из-за возникновения двухфазного течения в сторону верхней части ударной трубы. Следует отметить, что давление за ударной волной ( $M=1.3$ ), отраженной от твердой, непроницаемой и неподвижной стенки, равняется 3.1493 атм.

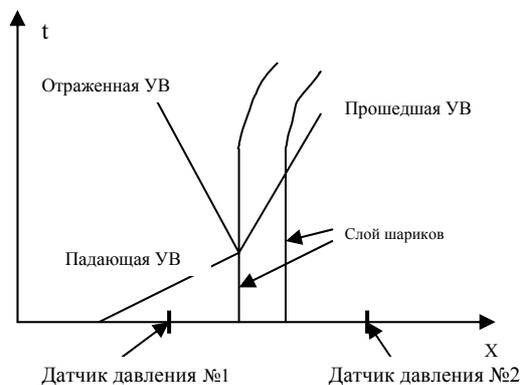


Рис. 3. Распространение газодинамических разрывов в эксперименте Rogue [15]

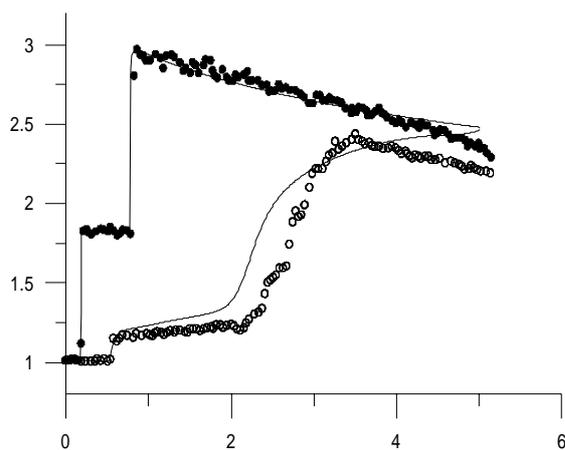


Рис. 4. Сравнение экспериментальных [15] (символы) и расчетных (сплошные линии) распределений значений давления (атм) (ось ординат) на датчиках в зависимости от времени (мс) (ось абсцисс). ● – показания в первом датчике давления, ○ – во втором

Соответствие расчетных и экспериментальных результатов на втором датчике несколько хуже. Можно отметить качественное совпадение на начальной стадии процесса. В момент времени  $t = 0.58$  мс через второй датчик давления распространяется слабая проходящая ударная волна. Давление за фронтом проходящей волны приблизительно 1.18 атм и оно медленно растет во времени до 1.25 атм.

В момент времени  $t = 2.18$  мс точки расположения второго датчика достигает двухфазный газодисперсный поток, образованный из частиц засыпки и воздуха. Давление при этом растет за 1.5 мс до значения 2.4 атм. Затем давление в зоне второго датчика начинает медленно снижаться за счет разгрузки. Некоторое количественное расхождение экспериментальных и рас-

четных данных на втором датчике можно объяснить неопределенностью значений коэффициентов описывающих вязкое трение (силу вязкого сопротивления), невысоким порядком точности используемой для расчетов разностной схемы и не учетом влияния пограничных слоев.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

### 5.1. Взаимодействие ударной волны с цилиндрическими и сферическими неоднородностями

Для исследования динамики взаимодействия ударной волны с  $M_s = 1.22$  были воспроизведены численно два эксперимента с цилиндрическими пузырями [12,13], и со сферическим пузырем [13]. Газ в канале – воздух при нормальных условиях, газ в неоднородностях (пузырях) – гелий или рефрижераторный газ R22. Плотность гелия меньше, чем плотность окружающего воздуха, поэтому взаимодействие сходно с действием рассеивающей акустической линзы. Плотность газа R22 больше плотности воздуха и взаимодействие сходно с действием собирающей акустической линзы. В зоне чистого газа задается объемная концентрация этого газа равная 0.999999, и второго газа 0.000001.

Таблица 1

#### Значения газовых постоянных в двумерных экспериментах

Газ	$\gamma$	$R, \frac{\text{КДЖ}}{\text{кг К}}$	$C_V, \frac{\text{КДЖ}}{\text{кг К}}$
Воздух	1.4	0.287	0.72
R 22	1.249	0.091	0.365
He	1.67	2.08	3.11
He + 28% воздуха	1.648	1.578	2.44

Значения газовых постоянных  $\gamma, R$  и удельной теплоемкости  $C_V$  при постоянном объеме, используемые в вычислительных экспериментах, приведены в табл. 1. Сетка для расчетной области была выбрана пропорционально ее размерам  $1800 \times 300$  ячеек.

### 5.2. Цилиндрический пузырь с рефрижераторным газом R22 в воздухе

На рис. 5 и 6 показаны ширен изображения результатов физического эксперимента и расчетное поле плотности для двух моментов времени. Ударная волна движется справа налево. Параметры среды в пузыре:  $p_{R22} = 101325$  Па,  $\rho_{R22} = 1.6861$  кг/м<sup>3</sup>,  $u_{R22} = 0$ .

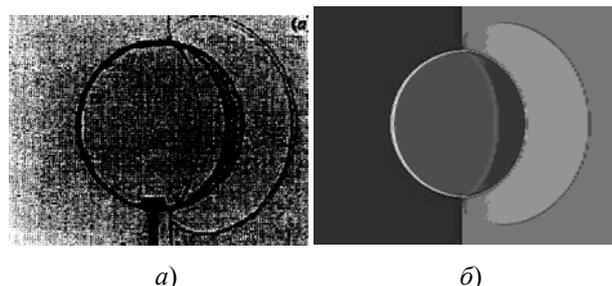


Рис.5.  $t = 55$  мс. а) – эксперимент [13], б) – расчет

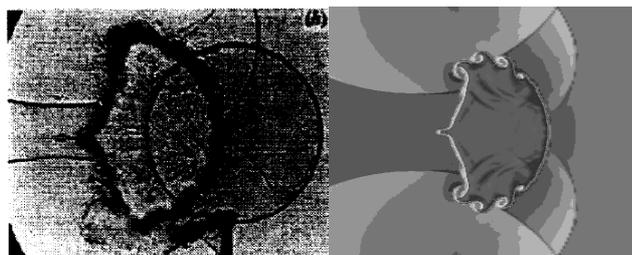


Рис. 6.  $t = 342$  мс. а) – эксперимент [13], б) – расчет

### 5.3. Цилиндрический пузырь гелия в воздухе

На рис. 7 показаны результаты численных расчетов взаимодействия ударной волны с цилиндрическим пузырем, заполненным смесью He + 28% воздух. Параметры гелиево-воздушной среды:  $\rho_{\text{He}} = 101325$  Па,  $\rho_{\text{He}} = 0.2228 \text{ кг/м}^3$ ,  $u_{\text{He}} = 0$ .

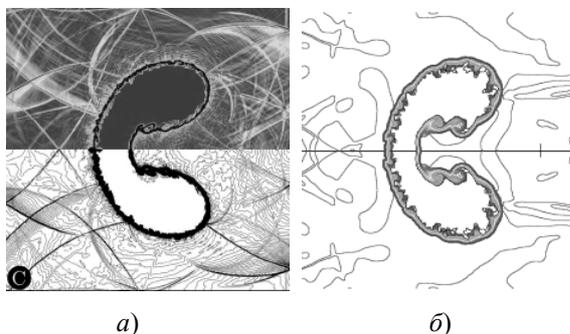


Рис. 7.  $t = 417$  мс. а) – расчет [14], б) – расчет

### 5.4. Сферический пузырь с гелием и воздухом в воздушной среде

Параметры среды и ударной волны аналогичны пункту 5.3, пузырь – сферический (рис. 8).

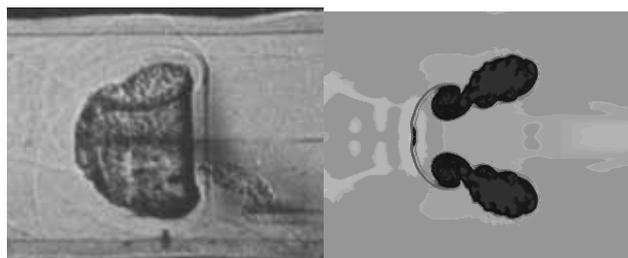


Рис. 8.  $t = 291$  мс. а) – эксперимент [13], б) – расчет

На границе пузыря возникает ярко выраженная неустойчивость Рихтмайера–Мешкова. Численный эксперимент хорошо соответствует физическому опыту.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель и численный метод для моделирования одномерных и двумерных нестационарных течений двухфазной среды с пренебрежимым объемным содержанием обеих фаз с учетом теплообмена между фазами. Решены тестовые задачи. Проведен численный расчет экспериментов в ударной трубе по взаимодействию ударной волны с неоднородностью в виде цилиндрических или сфери-

ческих пузырей большей или меньшей плотности, чем основная среда. Получено хорошее соответствие результатов численного расчета с результатами экспериментов.

При построении представленной математической модели предполагалось, что течение двухфазных сред ламинарное, т.к. в противном случае модель существенно усложняется. Наличие раздела фаз может заметно влиять на распространение турбулентных пульсаций и неравновесность турбулентности [19–20].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, Ч.1-2, М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 464 с.
2. Иванов И.Э., Численное моделирование многофазных течений с большим содержанием дисперсной фазы // Вестник Московского авиационного института. 2009. т.16. №2. с. 62–70.
3. Drew D.A., Mathematical modeling of two-phase flows // Annu.Rev. Fluid Mech. 1983. 15. 261-291.
4. Baer M.R., Nunziato J.W., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiphase Flow. 12. 1986. № 6. Pp. 861–889.
5. Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. Vol. 186. Pp.361–396.
6. Schwendeman D.W., Wahle C.W., Kapila A.K., The Riemann problem and high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow // J. Comput. Phys. 2006. Vol. 212. Pp.490–526.
7. Годунов С.К., Разностный метод численного расчета разрывных уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. т. 47. вып. 3. С. 271–306.
8. Иванов И.Э., Крюков И.А. Квазимонотонный метод повышенного порядка точности для расчета внутренних и струйных течений невязкого газа // Математическое моделирование. 1996. 8. 6. С. 47–55.
9. Harten A., Lax P.D., and van Leer B., On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Rev. 1983. 25.
10. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981, 304 с
11. Марчук Г.И. Метод расщепления. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1988. 284 с.
12. Haas J.-F., Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneties // Journal of Fluid Mechanics. 1987. 181. Pp. 41–76.
13. Layes G., Jourdan G., Houas L. Experimental investigation of shock wave interaction with a spherical gas inhomogeneity // Physics of fluids. 2005. 17. 028103-1-4.
14. Johnsen E., Colonis T. Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems.
15. Rogue X., Rodriguez G., Haas J.F., and Saurel R., Experimental and numerical investigation of the shock-induced fluidization of a particle bed // Shock Waves. 1998. V.8. Pp. 29–45.
16. Суржиков С.Т. Перспективы многоуровневого подхода к задачам компьютерной аэрофизики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 7. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-002.pdf>
17. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. Построение двумерных неструктурированных сеток методом молекулярной динамики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Т. 11. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-031.pdf>

18. Котов М.А., Кузенов В.В. Создание сложных поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов системами САПР // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 9. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-039.pdf>
19. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Численное моделирование отрывных течений в соплах // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 9. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-024.pdf>
20. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т.9. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-023.pdf>