

# Thermal Stress Evaluation for Hypersonic Vehicles: Problem Formulation

V.V. Shumaev<sup>1,2</sup>, V.V. Kuzenov<sup>2,3</sup>, A.N. Rybakov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> JSC Tactical Missile Corporation, Korolev, Moscow, 141080, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>3</sup> All-Russia Research Institute of Automatics, Moscow, 127055, Russia  
shumaev@student.bmstu.ru

## Abstract

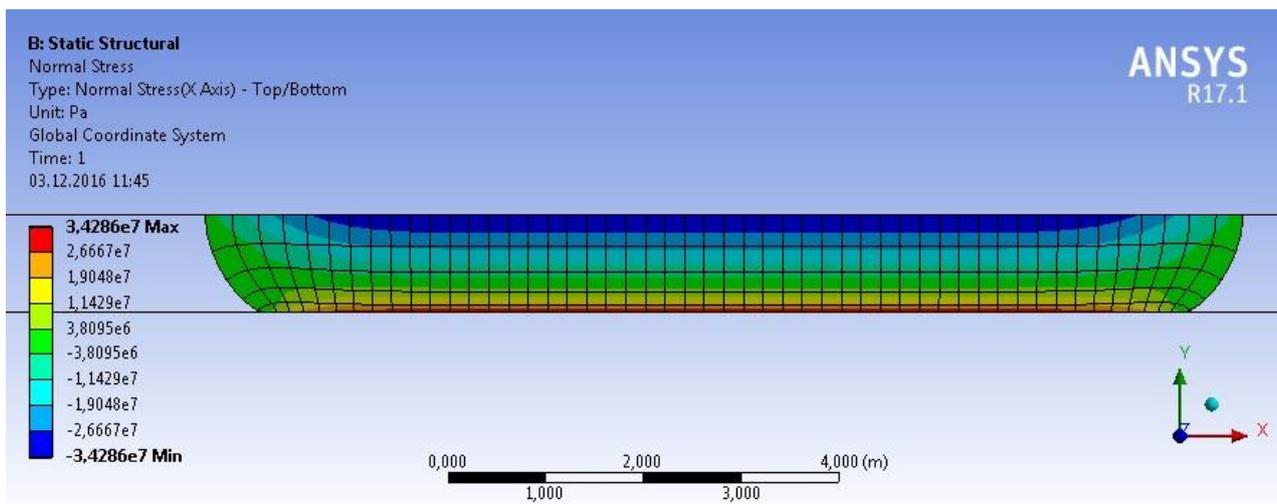
To determine the thermal stresses in hypersonic vehicles it is proposed to solve the quasi-static unrelated problem in terms of the theory of thermal stresses and take into account the nonlinear terms in the equations of thermoelasticity and the thermal and elastic properties of the material depending on temperature. For significantly heat-stressed elements of the vehicle under specified mechanical and heat loads the temperature and displacement distributions and components of stress and strain tensors will be evaluated. For this method, the system of equations with boundary conditions is presented and two test tasks is analyzed. These test tasks have an analytic solution and the obtained one from the commercial software package.

Keywords: hypersonic aircraft, thermal strength, thermal stresses, the quasi-static unrelated problem.

The system of equations in a vector form:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + 2 \text{grad} \mu \cdot \Pi_{\varepsilon} + \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{u}) - \text{grad}[(3\lambda + 2\mu)\alpha_T \theta] + \rho \ddot{u} = 0, \\ \rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(\lambda_q \text{grad} \theta), \end{cases}$$

Some test results of thermal stress evaluation in the plate:



Normal stresses  $\sigma_x$  distributed over the plate. The analytical value of the maximum normal stress is  $\sigma_{\max} = 3.428 \cdot 10^7$  Pa. The influence of edge effects is noticeable.

УДК 629.73.015.4:539.4

# Постановка задачи для оценки термонапряжений, возникающих в корпусе гиперзвукового летательного аппарата

В.В. Шумаев<sup>1,2</sup>, В.В. Кузенов<sup>2,3</sup>, А.Н. Рыбаков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> АО «КТРВ», Россия, г. Королёв, 141080, ул. Ильича, 7

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, г. Москва, 105005, ул. 2-ая Бауманская, 5, стр. 1

<sup>3</sup> ВНИИА им. Н.Л. Духова, г. Москва, 127055, ул. Суцневская, 22  
shumaev@student.bmstu.ru

## Аннотация

Для определения температурных напряжений в корпусах гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) предлагается решать квазистатическую несвязную задачу в рамках теории температурных напряжений, но с учетом нелинейных членов в уравнениях термоупругости, а также зависимости тепловых и упругих свойств материала от температуры. Постановка задачи выглядит следующим образом: для особенно теплонапряженных элементов ГЛА при заданных механических, тепловых воздействиях и свойствах материалов его конструкции будут определяться поля температур, перемещений, компонент тензоров напряжений и деформаций. Для такой методики приведена система уравнений с граничными условиями в общем виде и проанализированы две тестовые задачи, имеющие как аналитическое решение, так и полученное в коммерческом пакете программ численное решение.

Ключевые слова: гиперзвуковой летательный аппарат, термопрочность, температурные напряжения, квазистатическая несвязанная задача.

## 1. Введение

Режимы работы гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) охватывают широчайший диапазон скоростей и высот: число Маха  $M = 0 \dots 28$ , высота  $H = 0 \dots 120$  км, причем аппарат должен двигаться на таких скоростях и высотах на некоторых участках траектории на протяжении минут и десятков минут. Такие условия работы характеризуются интенсивными тепловыми потоками на поверхность ГЛА и, как следствие, сильным нагревом этих поверхностей и большими перепадами температур там [1]. Это неизбежно ухудшает прочностные характеристики материалов корпуса ГЛА и порождает термонапряжения, имеющие значительную величину [2-4]. Поэтому существует осознанная необходимость проводить проектировочные термопрочностные расчеты таких аппаратов.

Термопрочностная задача основана на уравнениях равновесия (в более общем случае – уравнениях движения), описывающих поля деформаций твердого тела и уравнении теплопроводности, описывающем температурное поле в нем. Поскольку изменение температуры тела вызывает деформацию, а деформация тела изменяет распределение температур в нём, то эти уравнения являются самосогласованными в общем случае [5, 6]. Такую задачу называют связанной задачей термоупругости.

Во многих исследованиях отмечается, что влияние механических колебаний на распределение температуры мало и для практических приложений следует использовать более простую теорию температурных напряжений [7]. В рамках этой теории распределение температуры находится независимо от перемещений из решения краевой

задачи теплопроводности, а перемещения определяются из решения упругой задачи, в которой градиент определенного температурного поля играет роль заданной объемной силы [5]. Такое мнение подтверждено многочисленными расчетами и экспериментами для тел из конструкционных материалов – металлов и сплавов, размеры которых принадлежат миллиметровым и метровым диапазонам [8].

К тому же на практике достаточно часто реализуются условия, соответствующие так называемому квазистатическому приближению, при котором в уравнениях, описывающих поля деформаций тела, опускают инерционный член [5, 6]. В работах [9, 10] приводится условие применимости такого приближения: размеры объекта и длина возбуждаемых в нем тепловых волн оказываются существенно меньше длин акустических волн. Примеры термпрочностных расчетов, где применено такое приближение [11, 12], показывают, что обоснованно его использование для нашей задачи. Таким образом, целесообразно проводить термпрочностные расчеты в рамках теории температурных напряжений и решать несвязанную квазистатическую задачу.

Важно заметить, что нами рассматривается случай больших изменений температуры ( $(T-T_0) \gg T_0$ ), что приводит к учету нелинейных членов в связанных уравнениях термоупругости, а также зависимости тепловых и упругих свойств от температуры [5].

Обзор литературы показал, что задача по определению термонапряжений в корпусе ГЛА уже решалась рядом авторов [2-4]. Модуль термпрочностных расчетов присутствует в многофункциональном пакете программ инженерного анализа ЛОГОС [13]. Также в литературе упоминаются программные комплексы MAPAT/Composite (для определения полей температур в составных конструкциях, включающих в себя детали из пространственно армированных и терморазлагающихся композитов), ORTOPLASCON/Composite (исследование термонапряжений в таких конструкциях) [14], а также программный комплекс SIGMA [15].

Однако следует отметить следующие моменты. Во-первых, работа [2] охватывает более общую задачу по расчету поля течения, теплового потока к элементу конструкции ГЛА, и затем уже только расчету температурных напряжений в этом элементе. Это приводит к тому, что расчеты в этой работе проводятся на суперкомпьютерах, в то время, как существует нужда в более простых средствах, которые можно будет осуществлять на рабочих станциях или персональных компьютерах. Во-вторых, работы по тематике ГЛА имеют характер, близкий к закрытому, поэтому затруднительно пользоваться результатами коллег, занимающихся той же проблемой, или в значительной степени опираться на работы зарубежных ученых. В-третьих, неизвестны возможности вышеописанных программных пакетов, их применимость к расчетам корпусов ГЛА, численным методам, там использованным. Вполне вероятна ситуация взаимного дополнения и перекрестной проверки (кросс-верификации) программных кодов, разрабатываемых в ходе данного исследования и таких пакетов программ. Всё это позволяет утверждать, что данное исследование актуально и имеет научную новизну.

## **2. Общая постановка задачи**

Общая постановка задачи данного исследования формулируется следующим образом: для особенно теплонапряженного элемента ГЛА (передняя носовая кромка корпуса, кромка крыльев, воздухозаборника, рулей высоты и поворота) задаются механические (аэродинамические силы, поля давлений) и тепловые воздействия (конвективный и радиационный тепловые потоки). В частности, эти данные берутся из работ, посвященных расчету аэротермогазодинамики ГЛА [1, 16]. Свойства материала (упругие коэффициенты, теплофизические свойства) также считаются заранее известными. На первом этапе предполагается, что среда изотропная, состоящая из одного материала, геометрия элемента ГЛА упрощается до двухмерной геометрии затупленного по сфере цилиндра, клина или

конуса. Определяется поле температур  $T$  в рассматриваемом элементе ГЛА, поле перемещений  $u_i$ , компоненты тензоров напряжений  $\varepsilon_{ij}$  и деформаций  $\sigma_{ij}$

Вышеописанные величины удовлетворяют следующим уравнениям [5]:

1. Уравнению движения элементарного объема внутри тела

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

где  $x_i$  – координата в декартовой системе,  $F_i$  – сила, действующая на элемент объема внутри тела,  $\rho$  – плотность материала.

2. Соотношениям между напряжениями и деформациями (соотношениям Дюамеля-Неймана)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left[ \lambda \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0) \right] \delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\mu$ ,  $\lambda$  – коэффициенты Ляме,  $\alpha_T$  – коэффициент термического расширения,  $T$  – текущая температура тела,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $T$  – исходная температура тела, при которой нет термонапряжений.

3. Соотношениям между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

4. Уравнению теплопроводности

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_q \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $\lambda_q$  – коэффициент теплопроводности,  $t$  – время,  $c_\varepsilon$  – теплоемкость при постоянной деформации.

Вышеприведенные уравнения для случая зависящих от температуры коэффициентов выглядят в векторном виде следующим образом [5, 6]:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + 2 \text{grad} \mu \cdot \Pi_\varepsilon + \text{grad}(\lambda \text{div} \vec{u}) - \text{grad}[(3\lambda + 2\mu)\alpha_T \theta] + \rho \ddot{u} = 0, \\ \rho c_{\varepsilon=0} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \text{div}(\lambda_q \text{grad} \theta), \end{cases} \quad (5)$$

где  $\text{grad} \mu \cdot \Pi_\varepsilon$  – скалярное произведение вектора  $\text{grad} \mu$  на тензор деформации  $\Pi_\varepsilon$ ,  $\theta = T - T_0$  – избыточная температура,  $c_{\varepsilon=0}$  – теплоемкость при нулевой деформации.

Начальные условия задаются в виде распределения температур  $T(x_i)$  и перемещений  $u_i(x_i)$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

Тепловые граничные условия задаются в виде температуры поверхностей элемента ГЛА или теплового потока к ней:

$$T(x_i)|_\Gamma = T_{0i}, \quad \left. (-\lambda_q \frac{\partial T}{\partial x_i}) \right|_\Gamma = q_i, \quad (6)$$

где  $T_{0i}$ ,  $q_i$  – заданные константы, символом  $\Gamma$  обозначается поверхность аппарата.

Механические граничные условия задаются в виде перемещений поверхности аппарата или напряжений на ней [5]:

$$u(x_i)|_{\Gamma} = u_{0i}, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j = f_i, \quad (7)$$

где  $u_{0i}$ ,  $f_i$  – заданные константы,  $n_j$  – нормаль.

Граничные условия в перемещениях связаны с граничными условиями в напряжениях следующей зависимостью [5]:

$$\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left[ \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \theta \delta_{ij} \right] n_j = f_i. \quad (8)$$

Важно отметить, что в данной работе рассматривается стационарный вариант уравнения (1) движения элементарного объема внутри тела, то есть рассматривается уравнение равновесия элементарного объема внутри тела. Для обоснования этого допущения проведем оценку величины слагаемого  $\rho \ddot{u}_i$  в первом уравнении системы (5), которое следует из уравнения (1).

Это слагаемое имеет порядок  $\rho_0 u_0 t_0^{-2}$ , где  $\rho_0, u_0, t_0$  – характерные плотность, перемещение и время. Сравним это слагаемое с  $\mu \Delta u$ , которое имеет порядок  $\mu_0 u_0 l_0^{-2}$ , где  $\mu_0, l_0$  – характерные значения коэффициента Ляме и размера тела. Здесь величины  $\rho_0, u_0, \mu_0$  задаются свойствами материала,  $l_0$  – геометрией задачи,  $t_0$  – характеристиками протекающих в системе процессов. Если  $t_0$  будет достаточно велико (это будет определено ниже), то слагаемое  $\rho \ddot{u}_i$  окажется пренебрежимо малым и может быть опущено в дальнейших расчетах.

Для класса решаемых нами задач характерным временем процесса является время распространения тепловой волны  $t_0 = l_0^2 / a$ , где  $a$  – коэффициент температуропроводности рассматриваемого материала. Для тела из стали с характерным размером в 1 см  $t_0 = 5.6$  с, для тела из вольфрама с таким же характерным размером  $t_0 = 1.5$  с.

Сравним это время с характерным временем процесса  $t_{хар}$ , при котором слагаемые  $\rho \ddot{u}_i$  и  $\mu \Delta u$  будут иметь одинаковые порядки. Для тела из стали с характерным размером в 1 см  $t_{хар} = 3.2 \cdot 10^{-6}$  с, для тела из вольфрама с таким же характерным размером  $t_{хар} = 3.8 \cdot 10^{-6}$  с.

Исходя из этого, получаем, что для рассматриваемых в данной работе тел  $t_0 \gg t_{хар}$ , поэтому слагаемое  $\rho \ddot{u}_i$  окажется пренебрежимо малым и может быть опущено. Выполненная оценка справедлива также и для остальных слагаемых уравнения упругости.

### 3. Тестовые задачи

На данном этапе работы производится набор простых тестовых задач для верификации разрабатываемых вычислительных кодов. Логичной выглядит идея сравнивать получаемые в будущем решения с пакетом программ ANSYS, который также позволяет решать термопрочностные задачи и сравнительно прост для освоения. В связи с этим далее приведено описание двух тестовых задач, имеющих аналитическое решение и результаты их расчета в коммерческом программном пакете.

### 3.1. Тестовая задача №1: напряженное состояние равномерно нагретого тела при нулевых перемещениях

Пластина размерами 10x10 м намертво заделана (предотвращено расширение по всей граничной поверхности) и равномерно нагрета на  $T - T_0 = 100^\circ \text{C}$ . Схема для этой задачи изображена на рис. 1. Пластина изготовлена из стали со следующими свойствами (предполагается изотропность и независимость от температуры этих свойств):  $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{Па}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\lambda = 60.5 \text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

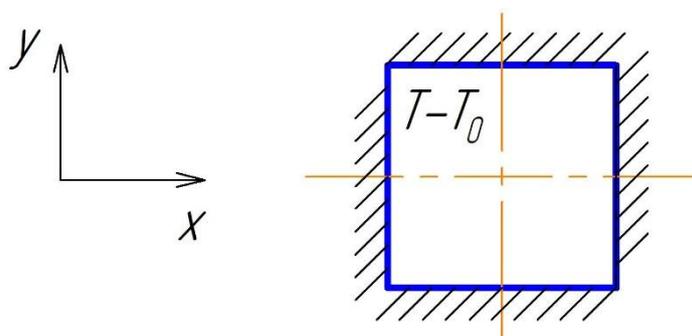


Рис. 1. Схема тестовой задачи № 1 по определению температурных напряжений в пластине

В этом случае перемещения во всех точках тела  $u_i = 0$ , и решение этой задачи выглядит следующим образом [5]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \sigma_x = \sigma_y = -(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0) = -\frac{E\alpha_T}{1 - 2\nu}(T - T_0), \quad (9)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Подстановка числовых значений данной задачи в формулу (9) дает  $\sigma_x = -6 \cdot 10^8 \text{Па} = 600 \text{МПа}$ .

На рис 2. показаны результаты расчетов данной тестовой задачи в программном пакете ANSYS Workbench 17.1. Число конечных элементов 169 было выбрано программой автоматически и не изменялось, поскольку его изменение не влияло на точность решения. Продолжительность расчета на ПК составила порядка нескольких секунд.

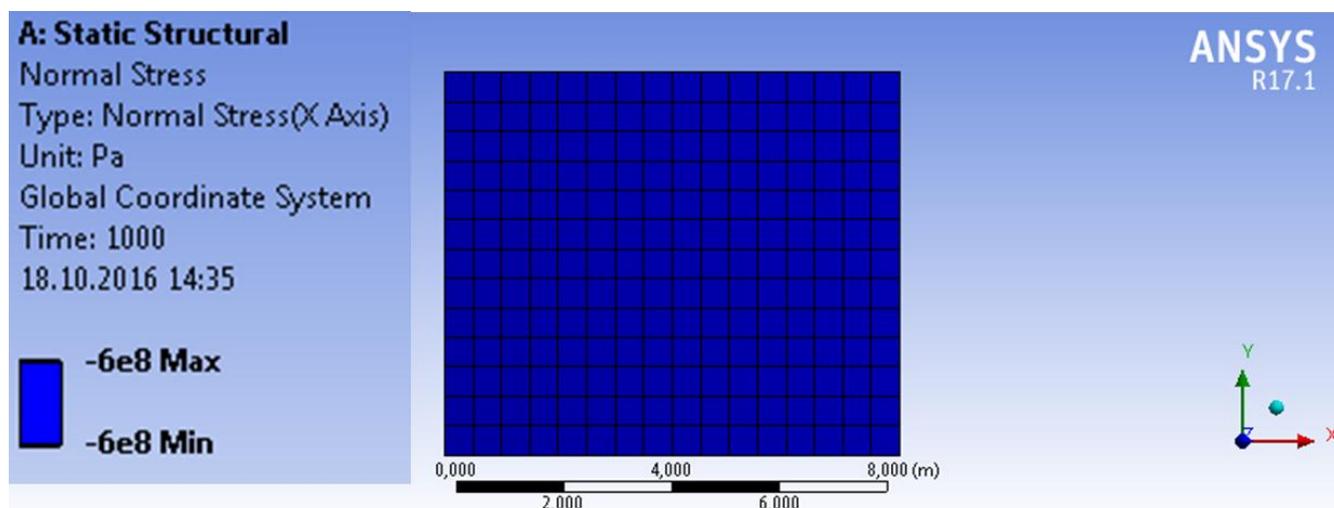


Рис. 2. Схема тестовой задачи № 1 по определению температурных напряжений в пластине

Из рисунка видно, что результаты расчета в программном пакете сходятся с результатами аналитического решения.

### 3.2. Тестовая задача №2: температурные напряжения в пластине

Пластина размерами 20x1 м заделана так, что её срединная плоскость может расширяться, но сама она лишена возможности изгибаться (смотрите рис. 3). Пластина изготовлена из стали со следующими свойствами:

$\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ C}^{-1}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\lambda = 60.5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Верхняя поверхность пластины равномерно нагрета до температуры  $T_1 = 32 \text{ C}$ , нижняя охлаждена до  $T_2 = 12 \text{ C}$ .

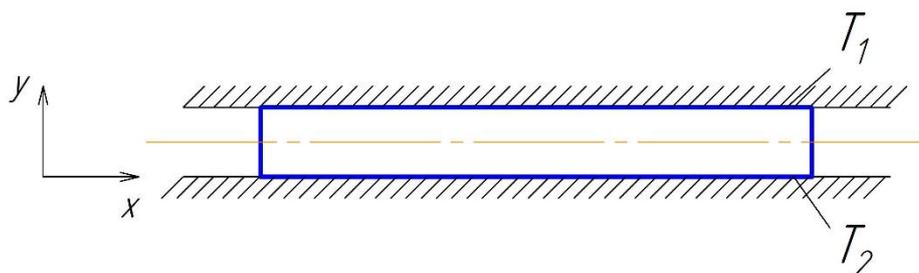


Рис.3. Схема тестовой задачи № 2 по определению температурных напряжений в пластине

В этом случае наибольшие температурные напряжения, возникающие в такой пластине, определяются по следующей формуле [17]:

$$\sigma_{\max} = \frac{\alpha_T \Delta T E}{2(1-\nu)}, \quad (10)$$

где  $\Delta T = T_1 - T_2$ .

Подстановка числовых значений данной задачи в формулу (10) дает  $\sigma_{\max} = 3.428 \cdot 10^7 \text{ Па} = 34.28 \text{ МПа}$ . Эти напряжения являются растягивающими у менее нагретой поверхности и сжимающими у более нагретой поверхности.

Расчеты выполнялись в программном пакете ANSYS Workbench 17.1. Число конечных элементов 230 было выбрано в результате исследования решения на сходимость по сетке. Меньшие значения числа узлов выдавали результаты, заметно отличающиеся от наиболее точного значения  $\sigma_x$ , большие значения числа узлов заметно увеличивали время расчета. При текущих условиях время счета на ПК составило порядка минуты. На рис.4-б представлены распределения температуры и нормальных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  по объему рассматриваемой пластины.

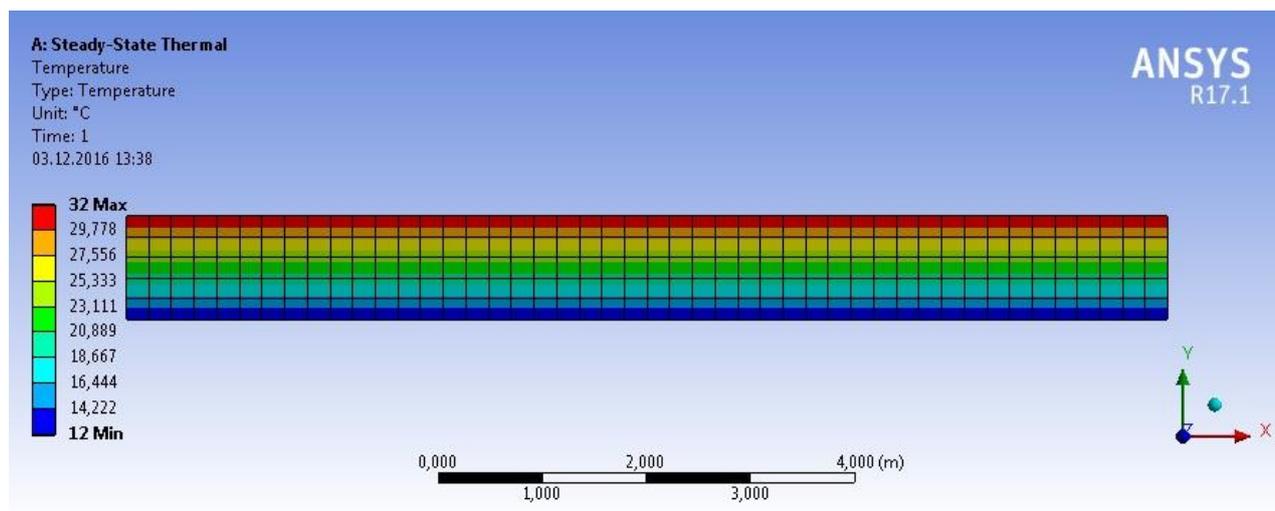


Рис.4. Распределение температуры по толщине пластины. В условиях данной тестовой задачи оно одномерное и линейное

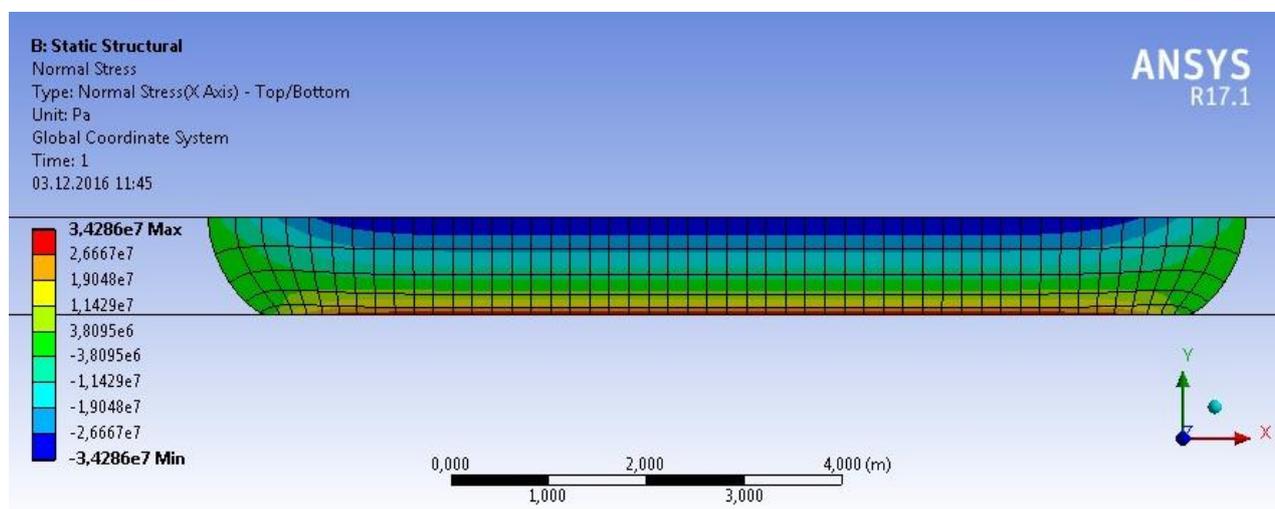


Рис.5. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по пластине. Заметно влияние краевых эффектов

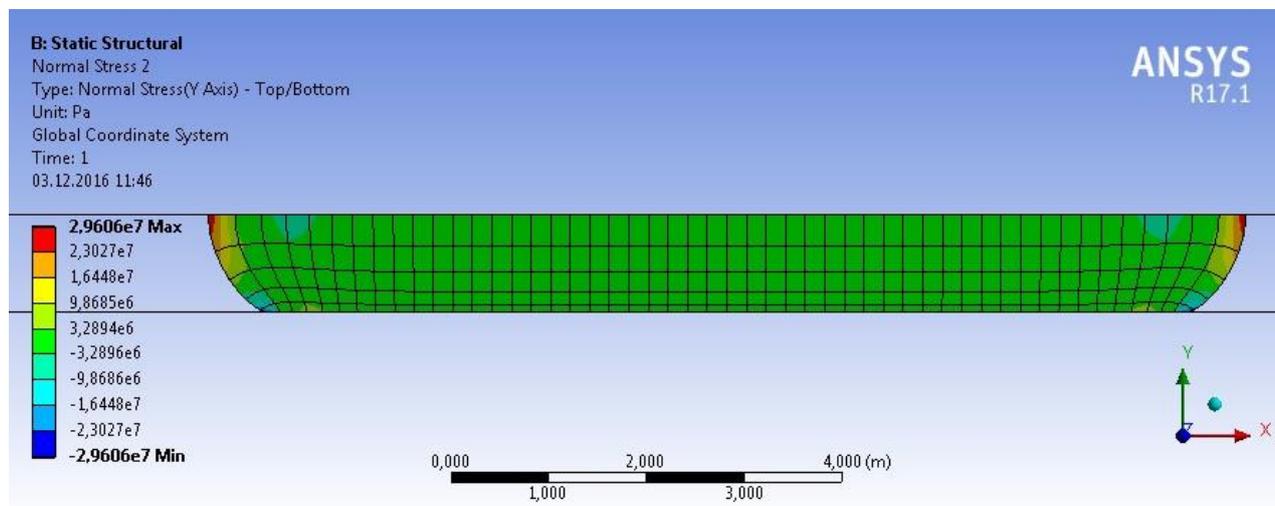


Рис.6. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по пластине. Зеленому цвету соответствует  $\sigma_y = 0$ . Также заметно влияние краевых эффектов

Из рис 5. видно, что максимальные напряжения  $\sigma_x$  хорошо соотносятся с напряжениями, предсказываемыми аналитической зависимостью в большей части пластины, за исключением ее краев, что можно объяснить присутствием краевых эффектов. Аналогичная картина наблюдается для распределения напряжений  $\sigma_y$ , которые равны нулю всюду, кроме краев пластины.

Также в качестве тестовых задач можно использовать результаты работы [3, 4].

#### 4. Заключение

Для определения температурных напряжений в корпусах гиперзвуковых летательных аппаратов достаточно решать квазистатическую несвязную задачу в рамках теории температурных напряжений, но с учетом нелинейных членов в уравнениях термоупругости, а также зависимости тепловых и упругих свойств материала от температуры. В рамках вышесказанного для особенно теплонапряженных элементов ГЛА при заданных механических, тепловых воздействиях и свойствах материалов его конструкции будут определяться поля температур, перемещений, компонент тензоров напряжений и деформаций.

Для такой методики приведена система уравнений с граничными условиями в общем виде и проанализированы две тестовые задачи, имеющие как аналитическое решение, так и полученное в коммерческом пакете программ численное решение. Всё это позволит разрабатывать собственные вычислительные коды для термопрочностных расчетов корпусов ГЛА.

#### Литература

1. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. На пути к созданию модели виртуального ГЛА. I. М.: ИПМех РАН, 2013. 160 с.
2. Численное решение сопряженной задачи гиперзвуковой аэродинамики и термомеханики термодуструктурирующих конструкций / Ю.И. Димитриенко [и др.] // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №9. URL. <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1114.html> (дата обращения 01.11.16).
3. Three-Dimensional Thermal Structural Analysis of a Swept Cowl Leading Edge Subjected to Skewed Shock-Shock Interference Heating / S.P. Polesky et al. // Journal of Thermophysics. V. 6. № 1. pp. 48-54.
4. Pandey A.K., Dechaumphai P., Weiting A.R. Thermal-Structural Finite Element Analysis using Linear Flux Formulation // NASA Technical Memorandum 102746. 1990. 10 p.
5. Коваленко А.Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
6. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: Учеб. Пособие. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Лычев С.А., Манжиров А.В. Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 138-154.
9. Муратиков К.Л. О формировании изображений неоднородных объектов лазерными фотоакустическими методами // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. № 22. С. 58–64.
10. Муратиков К.Л. О формировании изображений неоднородных объектов со свободной границей лазерным фотоакустическим методом // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 19. С. 59–66.
11. Чернова Т.А. Влияние нестационарных явлений на температурные напряжения и ресурс охлаждаемых лопаток турбин ГТД: дис. ... канд. техн. наук: 05.07.05 / Чернова Татьяна Александровна. Пермь, 2006. 160 с.

12. Кузнецова Ю.А. Нестационарные температурные поля и напряжения в конечных неоднородных телах: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Кузнецова Юлия Андреевна. Тула, 2006. 175 с.
13. Шейкин М. Российские суперкомпьютерные технологии проблемы и перспективы // Электроника: наука, технология, бизнес. 2013. №8. С. 114-120.
14. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. Проблемы численного моделирования полей температур и напряжений в конструкциях сопловых блоков РДТТ // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73 (1). С. 145-154.
15. Димитриенко Ю.И., Захаров А.А., Коряков М.Н. Разработка программного обеспечения для численного моделирования в задачах гиперзвуковой аэрогазодинамики перспективных летательных аппаратов // Программные системы: теория и приложения: электронный научный журн. 2012. Т.3, № 4. С. 17-26.
16. Суржиков С.Т. Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных. М.: ИПМех РАН. 2011. 192 с.
17. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

Статья поступила в редакцию 24 января 2017 г.