

# Discrete Spectral Model of Isotropic Turbulence

V. A. Frost

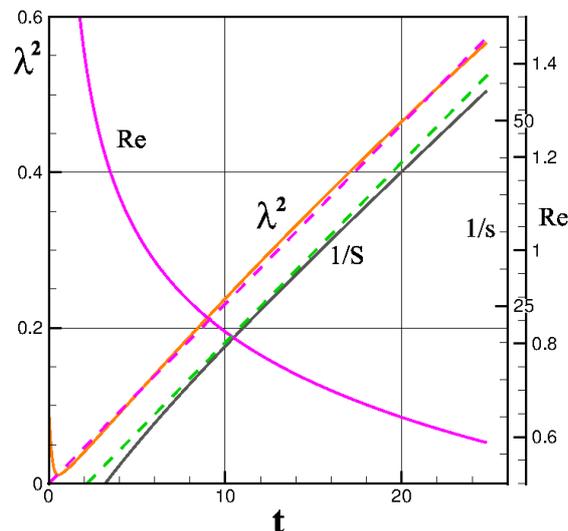
*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences  
Moscow, 119526, Russia  
frost@ipmnet.ru*

## Abstract

An equation for describing the evolution of the spectrogram velocity amplitudes of individual wave components determined on a finite part of positive integers is proposed. The interaction of the components in this equation subject to the triad rule:  $k = k' \pm k''$ , is proposed. The details of the energy transport along the spectrum, the decay and power supply modes are considered. In the absence of dissipation and pumping the total intensity of the system that is analogy of energy is unchanged. The results of a numerical calculation of the transition to white noise (in the absence of dissipation), the decay regimes at various Reynolds numbers, and the transition to the equilibrium state for different pumping the field by the large-scale components, are obtained. The results obtained correspond to similar experimental data obtained for the real turbulent flows. In the one-dimensional case, the correlation function and the third-order statistical moment that determines the structure change of a field upon decay is restored.

Keywords: isotropic turbulence, spectral form, the decay of turbulence.

Example of applying the model proposed is a calculation of the turbulence decay behind the turbulence-produced grids. Results of calculation



The decay of the squared micro-scale  $\lambda$ , the inversed field intensity  $S$  and the Reynolds number  $Re = \lambda S/\nu$  are plotted. Dashed lines designate the regions where the dependences are linear. This dependence of  $\lambda$  with precision up to the smallest details coincide with the data received by various experimenters in real flows.

УДК 532.517.4

# Дискретная спектральная модель изотропной турбулентности

**В.А. Фрост**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1  
frost@ipmnet.ru*

## Аннотация

Предложено уравнение для описания эволюции спектрограммы амплитуд скорости, определенной на конечном наборе волновых чисел, взаимодействие компонент скорости в котором удовлетворяет правилу триад:  $k = k' \pm k''$ . Рассматриваются детали переноса энергии по спектру, режимы вырождения и установление стационарных режимов. При отсутствии диссипации и подвода энергии сумма амплитуд, аналог энергии системы, не меняется. Получены результаты численного расчета режимов перехода к белому шуму (при отсутствии диссипации), режимов вырождения при различных числах Рейнольдса и режимов перехода к равновесному состоянию при различных способах подпитки поля крупномасштабными компонентами. Полученные закономерности соответствуют аналогичным экспериментальным результатам, полученным для реальных турбулентных потоков. Восстанавливается распределение корреляционной функции и третьего момента, определяющего изменение структуры поля при вырождении

Ключевые слова: изотропная турбулентность, спектральное представление, вырождение турбулентности.

## 1. Введение

Работа посвящена разработке метода получения реализации изотропного турбулентного поля скорости, которая может использоваться для проверки различных гипотез замыкания уравнений для моментов. Использование конкретной реализации, которая может представлять основные характерные признаки всего статистического ансамбля, позволяет избежать трудностей, связанных с незамкнутостью уравнений для моментов, используемых для описания турбулентных полей.

Изотропное турбулентное поле скорости является простейшим примером, пригодным для проверки различных способов построения замкнутых методов расчета турбулентных явлений. Существует большое количество экспериментальных данных по вырождению турбулентности в потоках за турбулизирующими решетками, которые можно использовать для анализа методов замыкания. Предполагая, что в этом случае наблюдается реализация изотропного турбулентного поля, можно использовать эти экспериментальные данные для проверки гипотез, используемых для замыкания уравнения Кармана–Ховарта. Проведенный анализ трех различных гипотез: К. Хассельманна [1], Ю.М. Лыткина и Г.Г. Черныха [2] и Н.И. Акатнова и Е.Н. Быстровой [3,4] показало [5], что произвести четкий выбор наиболее точного подхода не удастся, скорее всего, из-за неполного соответствия экспериментальных данных условиям изотропной турбулентности. Наиболее четко отличия от закономерностей, соответствующих изотропии, проявляются в экспериментах с турбулизирующими решетками сложной формы [6–8].

Использование для наших целей прямого численного интегрирования уравнения Навье–Стокса чрезвычайно трудоемко, а обязательное использование при этом граничных условий приводит к тому, что условия изотропии выполняются только в точках достаточно удаленных от границ расчетной области.

Казалось бы, что получить, поле, соответствующее изотропной турбулентности, можно задав некоторый спектр и разыграв амплитуды и фазы большого, но конечного, числа трехмерных комбинаций гармоник, удовлетворяющих условию неразрывности [9]. Но получаемое в этом случае распределение третьих моментов, являющихся объектом гипотез замыкания, из-за конечности набора гармоник и из-за возможных требований, связанных с ограниченностью области течения, получаются сильно отличающимися от экспериментально наблюдаемых.

Уравнения для различных средних значений параметров поля таких как средняя скорость, энергия турбулентности, средняя диссипация и т.п. (см., например, [10]) и более сложные методы LES и RANS [11], которые применяются исключительно для потоков в условиях далеких от изотропии, не могут решить нашу задачу.

Предлагается следующий путь получения и изучения свойств изотропного турбулентного поля скорости.

Трудности, связанные с конечностью области, преодолеваются переходом к спектральному представлению, а связанные с незамкнутостью уравнений для средних, использованием конкретной реализации поля и соответствующим выбором начальных значений. Использование конкретной реализации приводит к тому, что роль спектра процесса теперь исполняет спектрограмма.

Для одномерного поля строится система уравнений, описывающая изменение спектрограммы по времени, в которой взаимодействие отдельных гармоник происходит аналогичным по форме взаимодействиям, описываемым уравнением Навье–Стокса. Проводятся расчеты, иллюстрирующие развитие процессов, имеющих свои аналоги в реальных турбулентных потоках.

Используются следующие обозначения и терминология:

- i) общие:  $\nu$  – диссипативный фактор (обратная величина числа Рейнольдса);
- ii) в физическом (конфигурационном) пространстве:  $u = u(x, t)$  – турбулентные возмущения поля скорости;  $U_m(x)$  – внешнее поле, являющееся причиной возникновения и роста турбулентных возмущений;  $A_n(x)$  – внешний источник возмущений;  $R(r) = \langle u(x)u(x+r) \rangle$  – корреляционная функция поля  $u$ ;  $T(r) = \langle u(x)u(x)u(x+r) \rangle$  – статистический момент третьего порядка поля  $u$ ;
- iii) в волновом пространстве:  $i$  – номер волнового числа;  $k_i$  – волновое число, соответствующее  $i$ ;  $A_i$  – коэффициент в представлении поля  $u = \sum A_i \sin(k_i x)$ ;  $B_i$  – коэффициент в представлении внешнего поля;  $a(k)$  – плотность распределения амплитуд;  $S = \sum (A(k))$  – суммарная интенсивность поля;  $k_d$  – сдвиг начального распределения амплитуд по оси  $k$ ;  $\sigma$  – параметр, определяющий ширину начального распределения амплитуд;  $S_0$  – начальная суммарная интенсивность поля;  $N_a$  – нормирующий множитель.
- iv) терминология: вместо термина спектрограмма с целью сокращения используется термин "спектр", при построение графиков величины  $A_i$  рассматриваются как непрерывные функции; Для коэффициентов  $A_i$  и  $B_i$  используется термин "амплитуда": для суммарной интенсивности  $S$  иногда с целью сокращения используется термин "энергия"; термин "средний" используется для обозначения внешнего воздействия в реальных условиях, когда причиной возникновения пульсаций скорости является градиент среднего поля, тогда как в рассматриваемом случае поле  $U(x)$  представляет некое внешнее

воздействие, только по форме совпадающее с воздействием, происходящем в реальных условиях. Среднее значение  $\langle U(x) \rangle = 0$ .

В качестве эталона, используемого для получения уравнения для спектрограммы, рассматривается уравнение Бюргерса [12, 13] для некоторой одномерной функции  $u(x, t)$ , в которое добавлен аналог некоторого внешнего неизменяющегося поля  $U(x)$ , взаимодействие которого с полем  $u(x, t)$  может приводить к увеличению энергии поля  $u(x, t)$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [u(x, t) U(x)] + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad (1)$$

В разной форме уравнения похожие на уравнение (1) рассматривались при различных условиях подвода энергии к потоку [14–16]. Из всех результатов, приведенных в работах [12–16], отметим:

- i) существование точного решения уравнения (1) на конечном и бесконечном интервалах  $x$ ;
- ii) существование критического числа Рейнольдса для уравнения, рассматриваемого на конечном интервале  $x$   $Re_m = 2\pi m / B_{2m}$ , зависящего от номера волнового числа  $m$  и соответствующей амплитуды  $B_{2m}$  используемой в разложении поля  $U(x)$ . При превышении критического значения числа Рейнольдса происходит рост амплитуд  $A_m$ ;
- iii) численный расчет развития возмущений показал [13], что, возникнув, возмущения на начальном этапе развития процесса растут, затем рост сменяется их уменьшением и исчезновением. При рассмотрении бесконечного интервала  $x$  сохранение энергии можно обеспечить только постановкой соответствующих граничных условий, постановка которых, строго говоря, нарушает условия изотропии.

## 2. Постановка задачи

На заданном отрезке натурального числового ряда  $i=1, \dots, N$  задается массив волновых чисел  $k_i = ik_m$  здесь  $k_m$  – масштаб, определяющий диапазон волновых чисел. Поле  $u(x, t)$  рассматривается в виде разложения по набору ортогональных и нормированных функций

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j \phi_j(x), \quad (2)$$

в качестве которых на ограниченном наборе волновых чисел выбирается  $\phi_k(x) = \sin(kx)$ .

Квадратичные члены в уравнении (1), описывающие перестройку поля, после подстановки в уравнение (1) выражения для  $u(x, t)$  превращаются в произведение  $\sin(k_i x) \cos(k_j x)$ , что, используя тригонометрическое соотношение

$$2\sin(k') \cos(k'') = \sin(k' + k'') + \sin(k' - k''),$$

позволяет записать аналог уравнения (1) как систему уравнений для  $i=1, \dots, N$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k_j (A_{i+j} + B_{i+j}) A_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k_j (A_{i-j} + B_{i-j}) A_j - \sum_{j=1}^N k_j A_k A_j + \frac{dA_{n,i}}{dt} - \nu k_i^2 A_i \quad (3)$$

Здесь  $k_i$  – волновое число;  $A_k = A_k(t)$  – соответствующая интенсивность;  $B_k$  – коэффициенты в представлении поля  $U$ ;  $\nu$  – величина обратная числу Рейнольдса, построенному по начальной интенсивности поля, характерному волновому числу и коэффициенту, определяющему диссипацию  $\nu$ ;  $dA_{n,i}/dt$  – интенсивность внешнего источника.

Третье слагаемое правой части введено в уравнение (3) для обеспечения сохранения величины  $\sum_{j=1}^N A_j$  при  $\nu=0$  и отсутствии полей  $U$  и  $A_n$

Первые два слагаемых в правой части описывают рождение или увеличение интенсивности соответствующих мод, третье – уменьшение амплитуды  $A_i$  из-за влияния на другие моды и, наконец, последнее слагаемое правой части – уменьшение интенсивности  $A_i$  из-за диссипации.

Система (3) описывает изменение амплитуд гармоник некоторой реализации поля. Предполагается, что свойства решения этой системы соответствуют статистическим свойствам всей совокупности возможных реализаций.

Для получения условий устойчивости рассмотрим систему (3) при отсутствии полей  $U$  и  $A_n(x)$  для  $A_i \neq 0$ , предполагая все остальные  $A_i$  равными нулю, получаем

$$\frac{dA_i}{dt} = k_i A_i (U_{2i} - \nu k_i),$$

откуда критическое число Рейнольдса  $Re_i = \frac{U_{2i}}{\nu k_i} = 1$ .

Такая форма критического числа означает, что наиболее чувствительными являются крупномасштабные моды, причем волновое число возникающих возмущений оказывается вдвое меньшим, чем у вызывающей их гармоники среднего поля.

Рассмотрение системы на ограниченном наборе волновых чисел приводит к необходимости при проведении расчетов рассматривать только такие переходы, при которых величины  $k$ ,  $k' + k''$  и  $k' - k''$  принадлежат рассматриваемому интервалу  $(k_1, k_N)$ , т.е. не происходит вынос энергии из рассматриваемого набора волновых чисел. Использование отрезка натурального ряда  $k_i = ik_m$  обеспечивает необходимые условия.

При отсутствии полей  $U$  и  $A_n$ , и диссипации  $\nu = 0$  уравнение (3) будет

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k_j A_{i+j} A_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k_j A_{i-j} A_j - \sum_{j=1}^N k_j A_k A_j \quad (4)$$

Очень похожее уравнение может быть получено для одномерного спектра турбулентности при использовании гипотезы К. Хассельманна для третьих моментов [1] в уравнении Корсина [17]. В данной работе реализуется необходимая для численного расчета дискретизация уравнения, подобного уравнению работы [17], использующая переход от непрерывных функций к функциям на конечных множествах элементов. Такой прием использовался нами также для расчета плотности распределения вероятности скаляра [18, 19].

Решение строится, как решение задачи Коши для некоторых начальных условий значений амплитуд  $A_i$  при соответствующем выборе распределений  $B(k_i)$  и/или  $A_n$ , и проводится по методу, эквивалентному методу Рунге – Кутты второго порядка по времени.

Использование соотношения (2) для перехода в конфигурационное пространство из-за кратности волновых чисел приводит к появлению резких выбросов поля  $u$ . Избежать этого можно, если отождествить амплитуду  $A(k)$  с величиной  $a(k)dk$ , где  $a(k)$  – плотность энергии на интервале  $k_i \in (k_i, k_i + dk)$ . Тогда поле  $u$  можно вычислить, выбирая случайным образом величину  $k_i$  из значений интервала  $k_i \in (k_i, k_i + dk)$ , и выбирая также случайным образом соответствующий этому волновому числу фазовый сдвиг  $d\phi_i \in (0, 2\pi)$ .

### 3. Белый шум

При отсутствии диссипации и подвода энергии (накачки) суммарная интенсивность не меняется с течением времени. В этом случае должно существовать стационарное решение

уравнения (4), разложение которого  $A_i = \text{invar}(i)$  соответствует белому шуму, то есть процессу, корреляция  $\langle u(x)u(x+r) \rangle$  которого образует дельта-функцию  $\delta(r)$ .

Подстановка в уравнение (4)  $A_i = \text{invar}(i)$  показывает, что  $A_i = \text{const}$  есть решение. Из-за того, что рассматривается ограниченный диапазон волновых чисел, в котором отсутствуют высшие волновые числа, корреляция  $\langle u(x)u(x+r) \rangle \neq \delta(r)$ . На конечном интервале  $k_i$  это решение приводит к установлению некой корреляции, отличной от дельта-функции и определяемой протяженностью используемого интервала.

Для получения зависимостей величин  $A_i$  от времени используется система (4) с начальными условиями

$$A_i = N_a \exp \left[ -\frac{(k_i - k_d)^2}{2\sigma} \right],$$

где  $k_d$  определяет сдвиг распределения в сторону больших  $k$ , а  $\sigma$  – ширину начального распределения, величина  $N_a$  начальную суммарную интенсивность поля.

На рис. 1 изображено развитие процесса перехода к предельному решению для величины  $A_i$ . Толстые линии на этом рисунке соответствуют начальному и конечному распределениям. Заметно образование высших гармоник и пиков при малых  $k_i$ , соответствующих биениям. С течением времени эти пики, возникнув, сначала растут, а затем сглаживаются и исчезают.

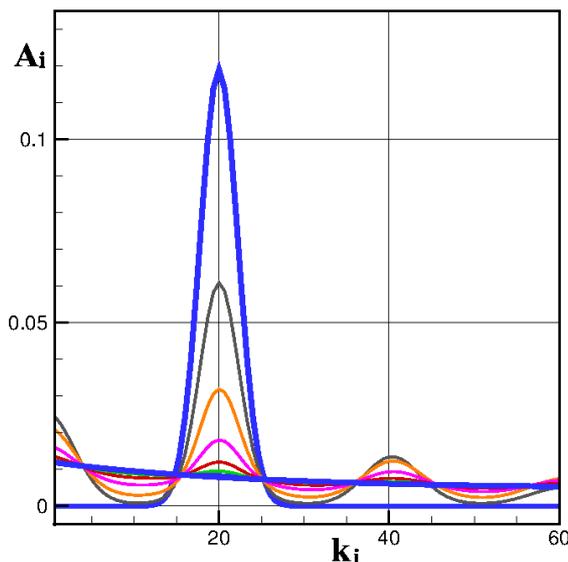


Рис. 1. Изменение спектра в процессе стремления к равномерному распределению. Толстые линии соответствуют начальному распределению и распределению при времени окончания расчета

#### 4. Вырождение

Рассматриваемый процесс соответствует условиям, наблюдаемым при турбулентном течении в канале вниз по потку за решеткой, вносящей в поток возмущения и тем самым формирующим исходное состояние турбулентного поля. В рассматриваемом случае начальное формирование потока моделируется заданием начальной формы спектрограммы.

Расчет процесса вырождения проводится по уравнению (3) при  $A_n$  и  $B_i$  равными нулю с начальными условиями

$$A_i = N_a \exp\left(-\frac{k_i^2}{2\sigma}\right),$$

где  $\sigma$  определяет ширину начального распределения, а  $N_a$  выбирается из условия  $\sum A_i = S_0$ , где  $S_0$  определяет начальную интенсивность поля.

Микромасштаб  $\lambda$  является величиной, изменение которой в процессе вырождения, характеризует изменение структуры поля. Эта величина в конфигурационном пространстве определяется через корреляционную функцию  $R(r) = \langle u(x)u(x+r) \rangle$

$$\lambda^2 = -\frac{R(0)}{\left.\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right|_{r=0}}$$

Аналогом этого соотношения в волновом пространстве (в нашем случае конечного набора волновых чисел) будет

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{i=1}^N A_i}{\sum_{i=1}^N k_i^2 A_i}$$

На рис. 2, *a* приведены изменение по времени величины квадрата микромасштаба и обратной величины интенсивности  $S$ . Пунктирная линия выделяет интервал, на котором величины изменяются линейно. На рис. 2, *b* приведено изменение по времени величины  $S = \sum A_i$ .

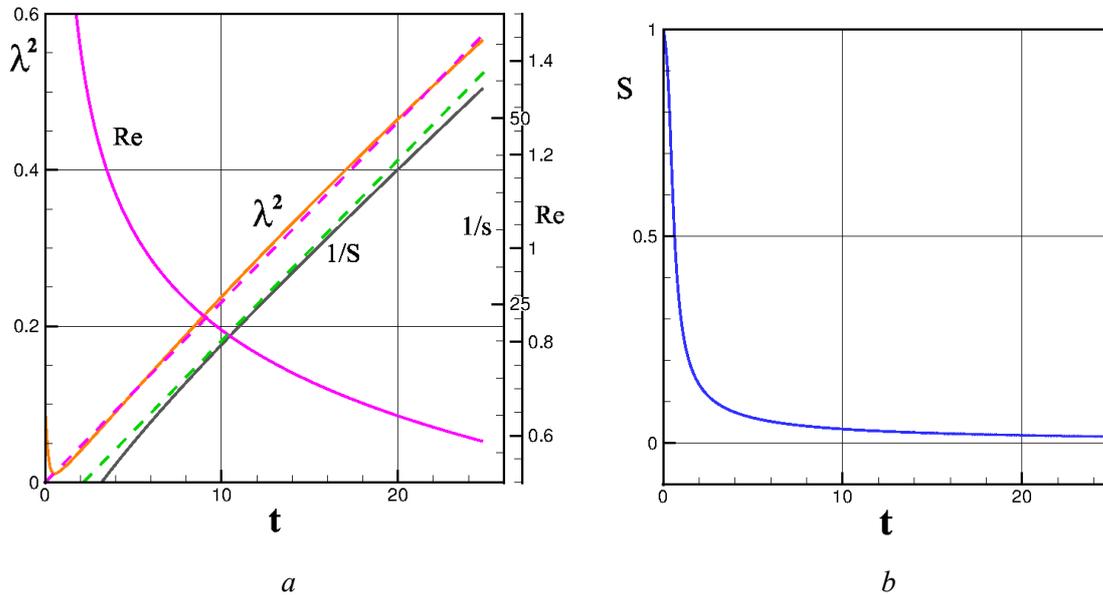


Рис. 2. Изменение в зависимости от времени величин  $\lambda^2$ ,  $Re_\lambda$  и  $1/S$  *a*), и величины  $S(t)$  *b*)

На рис. 3 приведены оригинальные рисунки работы [21], содержащие соответствующие полученным в данной работе результатам. Приводятся зависимости от расстояния от турбулизующей сетки для двух типов сеток. Совпадение характера кривых  $\lambda^2$  [21] и наших данных удивительно. В обоих случаях наблюдается продолжительный линейный участок изменения величины  $\lambda^2$  и небольшой спад на начальном участке. Отклонения от линейного

участка при больших временах на рис. 2 наблюдается при значениях величины  $\lambda^2$  превышающий имеющиеся экспериментальные значения. Совпадение результатов для величин  $1/S$  и  $1/\langle u(x)^2 \rangle$  [21] несколько хуже. Линейный участок на расчетной зависимости  $1/S$  начинается несколько позже, чем начинается линейный участок кривой  $\lambda^2$  и при больших временах наблюдается отклонение от линейной зависимости. Тогда как на экспериментальной зависимости нелинейные участки на кривых  $1/\langle u(x)^2 \rangle$  при больших удалениях от сетки отсутствуют.

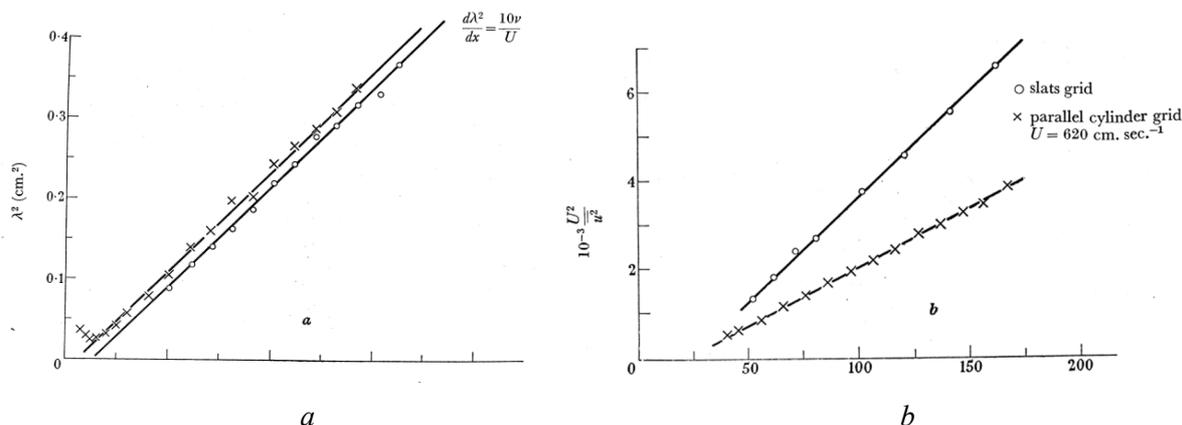


Рис. 3. Рисунки из [21]: изменение величин  $\lambda^2(\text{cm}^2)$  в зависимости от расстояния от решетки *a*); тоже для  $U^2/u^2$  *b*)

На рис. 4 приведены результаты измерений и численного расчета зависимости числа  $Re_\lambda$  от времени, рассчитанные по работам нескольких авторов.

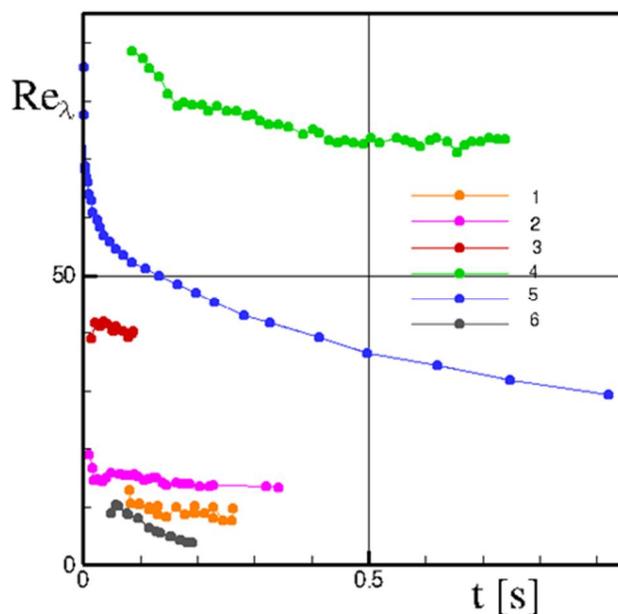


Рис. 4. Зависимости числа Рейнольдса  $Re_\lambda$  от времени по данным: 1 – за решеткой, составленной из параллельно расположенных цилиндрических прутьев [21]; 2 – за стандартной решеткой [21]; 3 – [22]; 4 – [6]; 5 – [24]; 6 – результаты расчета по уравнению Навье–Стокса [7]

Большую часть кривых нельзя трактовать как постоянство числа Рейнольдса в процессе вырождения. Некоторые результаты, особенно, полученные численно [24], очень близки приведенным на рис. 2, *a*. Не ясна причина широкого диапазона ( $5 \div 75$ ) предельных значений числа Рейнольдса. По неизвестной причине при больших временах формируется некоторое, различное для различных начальных условий, значение числа Рейнольдса.

Закономерности, связанные с поведением числа Рейнольдса существенно отличаются для условий расчета и эксперимента в реальных условиях. Для экспериментальных условий предположение о постоянстве числа Рейнольдса  $Re_\lambda$  приводит к уравнению для  $\lambda^2$

$$\frac{d\lambda^2}{dt} = 10\nu,$$

что подтверждается экспериментальными данными (см. например, [21]). В тоже время аналогичный результат для расчетных условий получается при условии постоянства комплекса  $\lambda^2 S$  а не числа Рейнольдса  $Re_\lambda$ , что приводит к

$$\frac{d\lambda^2}{dt} = \nu$$

и монотонному уменьшению числа Рейнольдса. Физический смысл величины  $Re_\lambda$  – отношение возмущающего действия нелинейного взаимодействия к сглаживающему действию диссипации. Отличие от нуля предельных экспериментально определенных значений чисел  $Re_\lambda$  следует трактовать как сохранение возмущающих факторов до предельно больших времен вырождения. Естественно было бы предположить, что предельное число Рейнольдса обращается в нуль, что соответствовало бы полному доминированию сил диссипации.

В следующем разделе исследуется влияние диссипации на процесс вырождения.

#### 4.1. Влияние интенсивности диссипации на микромасштаб $\lambda$

На рис. 5, *a* приведены результаты расчета изменения по времени микромасштаба для различных значений интенсивности диссипации  $\nu$ . Скорость роста величины  $\lambda^2$  оказывается пропорциональна величине параметра  $\nu$ . При малых значениях заметно отличие от линейного роста. На рис. 5, *b* приведены те же результаты, но в качестве оси ординат выбрано произведение  $\nu t$ . Скорости роста в этих координатах оказываются одинаковыми, а сдвиг по оси ординат объясняется различиями в начальных участках, что иллюстрирует рис. 6, *a*, на котором приведены соответствующие начальные участки зависимостей величины  $\lambda^2$  от времени.

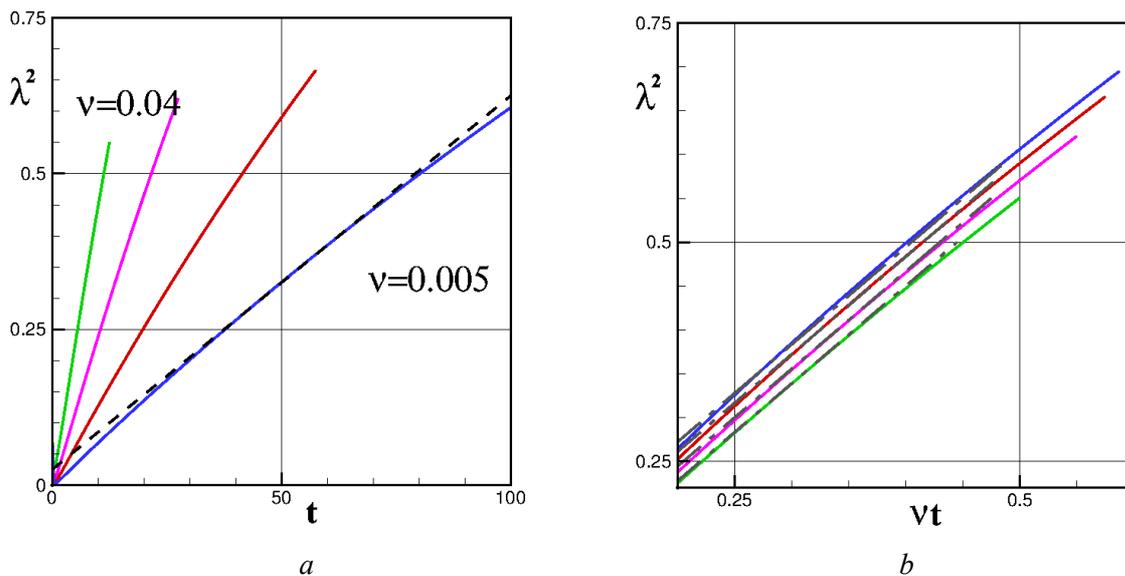


Рис. 5. Изменение в процессе вырождения величины  $\lambda^2$  в зависимости от времени *a*), тоже в зависимости от произведения  $\nu t$  *b*)

Рисунок 6, *b* содержит зависимости величины  $\lambda^2$  от времени для большого числа экспериментальных исследований [6, 7, 21, 22]. Там же приведены некоторые параметры проведенных экспериментов. В некоторых из этих работ содержались по несколько серий экспериментов, отличающихся, как правило, типами используемых сеток. Небольшое отличие от основных результатов наблюдается для данных [22].

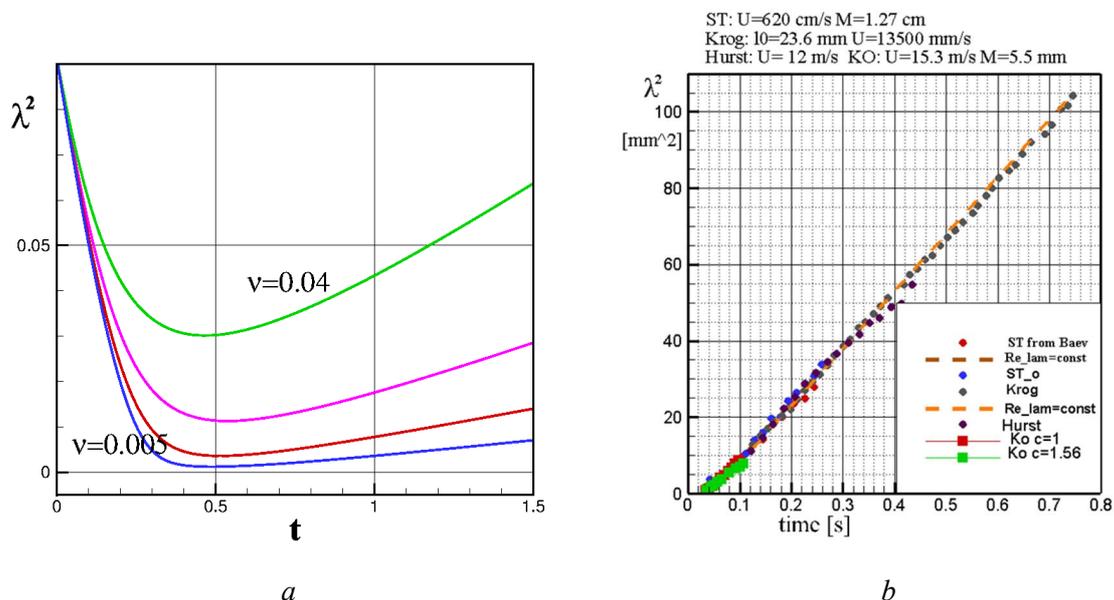


Рис. 6. Начальные участки зависимостей величины  $\lambda^2$  от времени *a*). Обобщенная зависимость  $\lambda^2$  от времени по экспериментам: ST – [21]; KO – [22]; Krog – [6]; Hurst – [7]; пунктирная линия соответствует наклону  $10\nu$  *b*)

### 4.2. Спектрограммы

Результаты расчета изменения величин  $A_k(t)$  в процессе вырождения приведены на следующих рисунках. На рис. 7, *a* для одного значения величины  $\nu$  приводятся нормированные величины  $A_k/A_1$ . На начальном периоде наблюдается расширение спектра в сторону больших волновых чисел, а затем амплитуды при больших волновых числах уменьшаются и нормированный спектр перестает изменяться. На рис. 7, *b* для ряда значений величины  $\nu$ , меняющейся в диапазоне 0.005 до 0.04, приводятся установившиеся распределения нормированных величин  $A_k/A_1$ .

Преобразование

$$k_i^n = k_i^0 + (k_i - k_i^0) \left( \frac{\nu_i}{\nu_0} \right)^{-0.55} \tag{5}$$

позволяет свести все кривые к одной, в данном случае соответствующей наибольшему  $\nu$  (пунктирная линия на рис. 7, *b*).

На рис. 8 приведены для установившиеся распределения нормированных величин зависимости  $\log(A_k/A_1)$ . Прямые линии выделяют интервалы больших волновых чисел, на которых вязкость играет определяющую роль. При больших волновых числах все кривые достаточно близки прямым. Соотношение (5) позволяет определить зависимость распределения амплитуд при больших волновых числах от коэффициента  $\nu$

$$A_i \sim \exp(-\nu^{0.55} k)$$

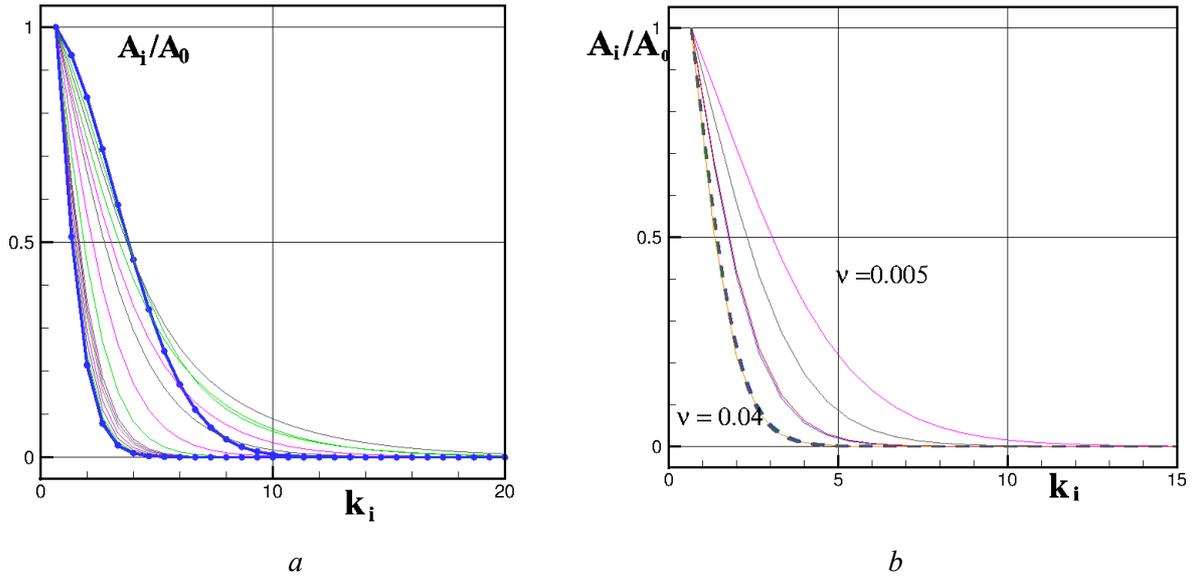


Рис. 7. Изменение спектра в процессе стремления к равномерному распределению. Толстые линии соответствуют начальному распределению и распределению при времени окончания расчета *a*), Предельные спектры для различных значений  $\nu$  *b*)

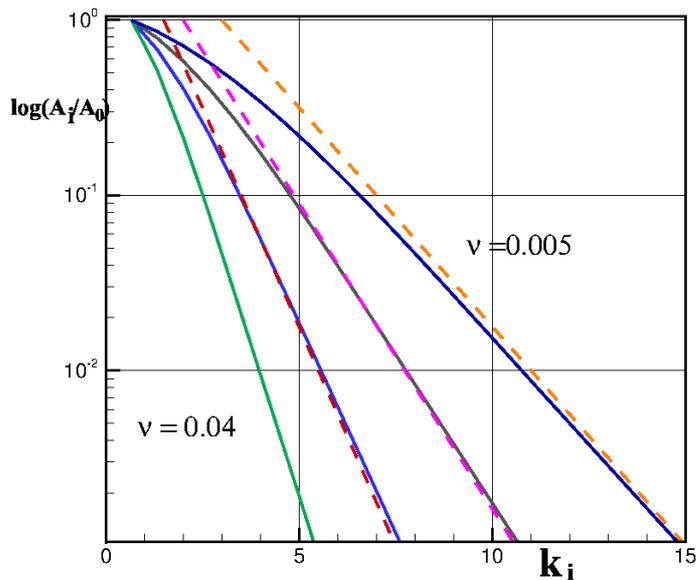


Рис. 8. Тоже что рис. 7, *b* в полулогарифмических координатах

### 5. Стационарные режимы

Стационарные режимы могут быть получены только при специальном воздействии на амплитуды  $A_i$ , которое может осуществляться несколькими способами.

Первый способ: влияние внешнего поля, осуществляющейся посредством добавления величины  $A_n dt$  на каждом шаге расчета к величинам  $A_i$ , изменяющимся под действием диссипации. Здесь величина  $A_n$  характеризует распределение по волновым числам интенсивности такой добавки (накачки). Этот способ влияния на распределение амплитуд моделирует работу вентилятора, непрерывно подводящего энергию в среду. При стационарной работе вентилятора после некоторого начального периода возникает стационарное в среднем состояние поля скорости.

Второй способ: рост амплитуд  $A_i$  происходит благодаря влиянию некоторого внешнего стационарного поля, спектральное представление которого  $B_i$  известно. Этот случай моделирует рост возмущений скорости из-за существования градиента средней скорости в реальных потоках.

### 5.1. Режим, моделирующий работу вентилятора

Расчет проводился для нулевого начального распределения  $A_i = 0$ , что соответствует включению вентилятора при начальном отсутствии движения среды. Распределение  $A_n$  задавалось равномерно распределенным на 15 низших волновых числах и нормировалось на задаваемую интенсивность воздействия.

На рис. 9, *a* изображен режим выхода на стационарное состояние. Приведены зависимости для величин  $\lambda^2$  и суммарной интенсивности  $S$ .

Результаты могут быть объяснены существованием начального участка, на котором "струя" вентилятора в первоначальной спокойной среде первоначально состоит из крупных образований, размер которых, определяется конструкцией вентилятора и характеризуется величиной  $\lambda^2$ , достаточно велик, турбулентная вязкость мала и энергия системы резко возрастает.

Вентилятор подводит энергии значительно больше, чем уменьшается благодаря диссипации.

Однако, начинающийся распад струи приводит к возникновению мелкомасштабных образований, происходит рост турбулентной вязкости и избыток первоначально накопленной энергии диссипирует. Устанавливается стационарное состояние, при котором подводимая энергия по величина равна диссипируемой.

На рис. 9, *b* для режима, моделирующего вентилятор, приведены начальный и установившийся спектры.

Масштаб выбран, чтобы подчеркнуть, что наблюдается два характерных участка волновых чисел, первый, совпадающий с интервалом волновых чисел накачки - крупномасштабный и мелкомасштабный, возникший в результате процесса перестройки спектра, с достаточно широкой областью больших волновых чисел, который приводит к увеличению турбулентной вязкости, обеспечивающую высокую скорость диссипации энергии.

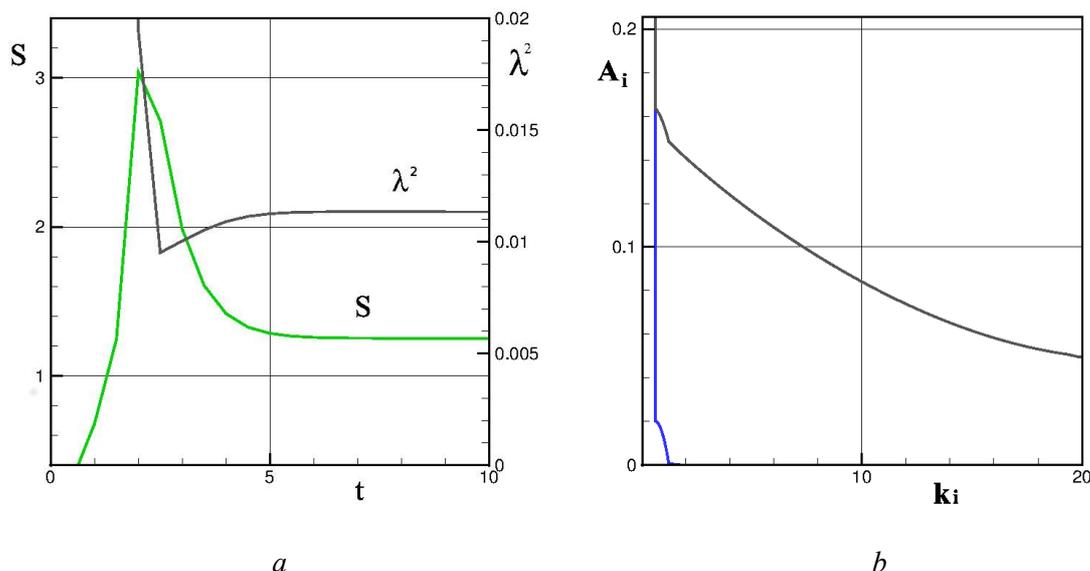


Рис. 9. Изменение по времени величин  $S$  и  $\lambda^2$  для режима вентилятор *a*), соответствующие спектры *b*)

## 5.2. Влияние внешнего поля

В этом случае задавалось начальное распределение  $A_i = 0.01$ . Распределение амплитуд внешнего поля  $B_i$  задавалось, как и в предыдущем расчете, равномерно распределенном на 15 низших волновых числах и нормировалось интенсивность воздействия внешнего поля.

На рис. 10, *a* изображен режим выхода на стационарное состояние под воздействием внешнего поля. Масштаб изображения величины  $\lambda^2$  в этом случае изменен с целью проиллюстрировать небольшую немонотонность кривой. На рис. 10, *b* для рассматриваемого случая изображены начальный и установившиеся спектры.

Характерные черты кривых для обоих рассмотренных режимов входа на стационарное состояние практически совпадают, за исключением небольшого провала на кривой  $u$ , описывающей влияние среднего поля.

Поведение кривой  $u$  в последнем случае объясняется также существованием начального участка, на котором растут в первую очередь амплитуды низших волновых мод. Это подтверждается и характером изменения микромасштаба. Начальные поля на более широком диапазоне волновых чисел существенно увеличили бы начальную турбулентную вязкость.

Рассмотренные примеры являются характерными иллюстрациями влияния начальных условий на характер решения.

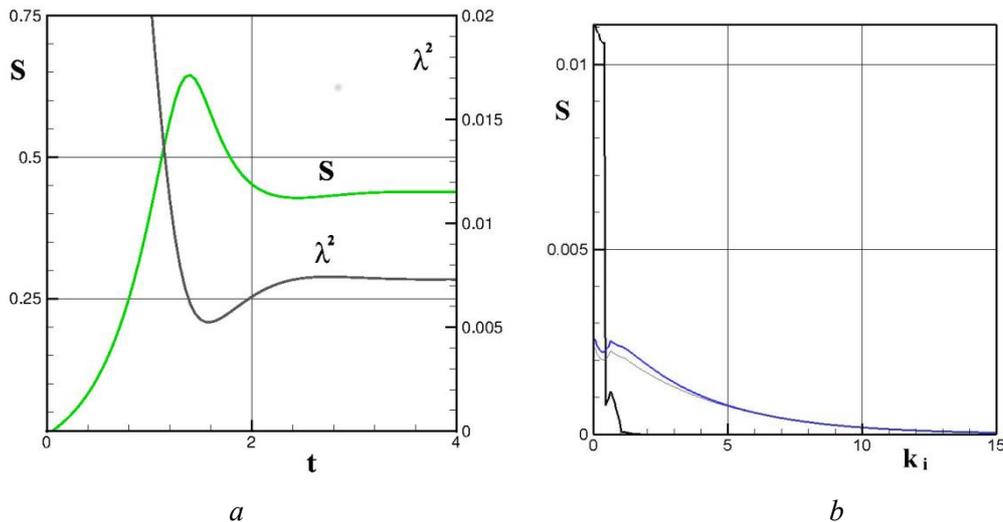


Рис. 10. Изменение параметров для режима влияния среднего поля *a*), соответствующие спектры *b*)

## 6. Конфигурационное пространство. Третье моменты

Использование для восстановления поля в физическом пространстве соотношения  $u(x,t) = \sum A_i(t) \sin(k_i x)$  из-за кратности волновых чисел, связанной с выбором базиса, приводит к появлению резких изменений скорости в отдельных точках  $x$ . Избежать этого можно, вспомнив, что мы имеем дело с аппроксимацией непрерывного распределения амплитуд  $A(k,t)$  и, следовательно, величины  $A_i$  представляют вклад диапазона, обозначенного  $k_i$  в интеграл  $\int A(k) dk$ . Значит  $A_i = a(k_i) dk$ . Это позволяет при расчете поля  $u(x)$  для преодоления выше упомянутых трудностей осуществлять случайный выбор величины  $k_i$  в пределах диапазона  $(k_i, k_i + dk_i)$ . Возможно также выбрать случайный для каждого  $A_i$  фазовый сдвиг из диапазона  $(0, 2\pi)$ .

Образец реализации поля  $u(x,t)$  приведен на следующем рисунке (рис. 11, *a*). Там же (рис. 11, *b*) приведена корреляционная функция  $R(r) = \langle u(x)u(x+r) \rangle$  и третий момент, близко по форме совпадающий с производной от корреляционной функции.

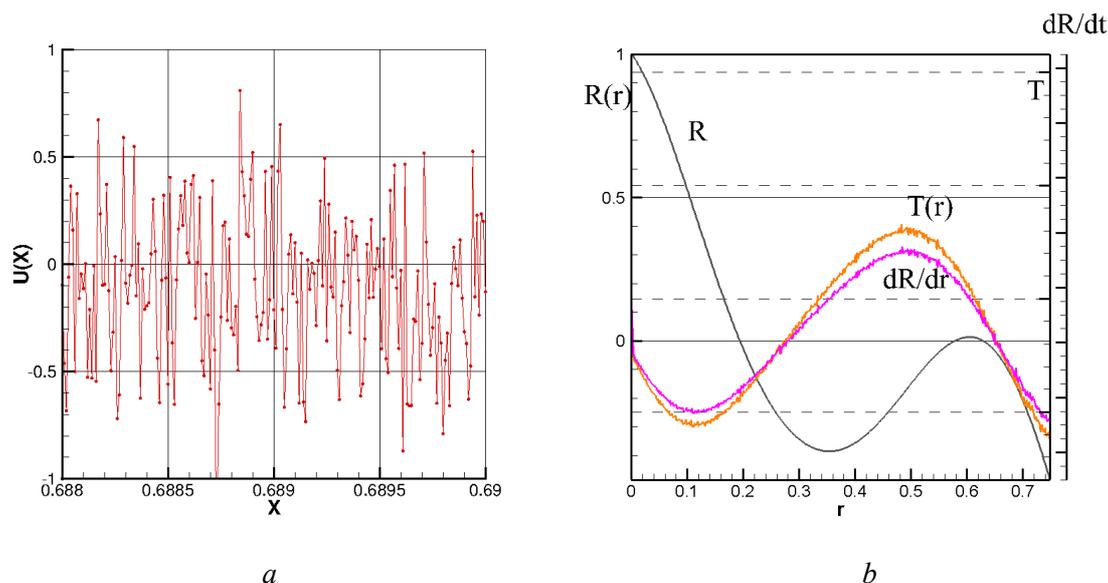


Рис. 11. Пример реализации поля  $u(x,t)$  *a*), корреляционная функция  $R(r) = \langle u(x)u(x+r) \rangle$ , третий момент  $T(r) = \langle u(x)u(x)u(x+r) \rangle$  и  $dR(r)/dr$  *b*)

## 7. Заключение

Данное исследование свойств изотропных турбулентных явлений базируется на четырех основных допущениях.

Первое. Использование уравнений для конкретной реализации случайного явления, к которым, несомненно, относятся турбулентные движения жидкости, позволяет избежать трудностей, возникающих при переходе от динамических уравнений (например, уравнений Навье–Стокса) к уравнениям для средних, когда нелинейность динамических уравнений приводит к их незамкнутости.

Предполагается, что полученное описание отдельной реализации достаточно точно соответствует свойствам всего ансамбля.

Второе. Переход в волновое пространство, естественный при рассмотрении изотропных полей, позволяет избежать трудностей, связанных с постановкой граничных условий, необходимых в конфигурационном пространстве и нарушающих, в принципе, требования изотропии.

Третье. Выбор конечного множества волновых чисел, расположенного на конечном отрезке натурального ряда, позволяет получить дискретное описание рассматриваемого процесса и организовать вычислительный процесс, в котором взаимодействие различных компонент волнового поля не приводит к расширению множества волновых чисел.

Этот выбор множества волновых чисел позволяет использовать простейшие тригонометрические функции для преобразования решения из волнового пространства в конфигурационное. Взаимодействие приводит только к перестройке распределений амплитуд. Искусственным приемом удается выполнить необходимые условия сохранения.

Четвертое, пожалуй, главное. Взаимодействие амплитуд волнового поля, соответствующее нелинейности динамических уравнений строится с использованием правила триад  $k = k' + k''$ .

Численное решение задачи Коши позволило получить результаты для режима диссипативного вырождения поля, для режимов подвода энергии непосредственно и в результате взаимодействия со средним полем, которые во многих деталях совпадают с известными результатами для реальных турбулентных потоков.

Особенно следует отметить, что рассматриваемый подход позволяет учесть влияние начальной структуры поля, которая может оказывать существенное влияние на получаемые результаты.

Работа выполнялась в по госзаданию АААА-А17-117021310385-6.

Автор благодарит Э.В. Теодоровича за плодотворные обсуждения.

## Литература

1. Hasselmann K. Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz//Deutsche Hydrographische Zeitschrift. 1958. Band 11, Heft 5, 207-217.
2. Лыткин Ю.М., Черный Г.Г. Об одном способе замыкания уравнения Кармана – Ховарта//Динамика сплошной среды. 1976. вып. 27. С. 124–130.
3. Акатнов Н.И., Быстрова Е.Н. Расчеты некоторых характеристик однородной турбулентности на основе уравнения Кармана – Ховарта, замкнутого посредством полуэмпирической модели /Теплофизика высоких температур. 1999. Т. 37. № 6. С. 895–903.
4. Акатнов Н.И., Быстрова Е.Н. Использование модели осесимметричной турбулентности для расчета статистических характеристик пульсационного движения в потоке с однородной неизменной скоростью сдвига осредненного движения//Теплофизика высоких температур. 2000. Т. 38. № 4. С. 600–608.
5. Фрост В.А. Анализ некоторых методов замыкания уравнения Кармана – Ховарта. Препринт ИПМех РАН 2016. № 1120. с. 24 ISBN 978-5-91741-166-8
6. Krogstad Per-Age, Davidson P. Near-field investigation of turbulence produced by multi-scale grids// Physics of fluids. 2012. Vol. 24(3). Pp. 1–6. TSFP Digital Library online, 2011, v. 7.
7. Hurst D., Vassilicos J.C. Scalings and decay of fractal-generated turbulence// Physics of Fluids. 2007. Vol. 19(3). сс. 1-31.
8. Valente P.C., Vassilicos J.C. The non-equilibrium region of grid-generated decaying turbulence//Journal Fluid Mechanics. 2014. Vol. 744. No 10. Pp. 5–37.
9. Kraichnan, R.H. Diffusion by a Random Velocity Field//The Physics of Fluids. 1970. Vol. 13. No. 1. Pp. 22–31.
10. Любимов Д.А., Секундов А.Н. Применение элементов прямого численного моделирования для анализа влияния геометрии сопла и режима истечения на характеристики турбулентности околозвуковых выхлопных струй. В сборнике: Теоретическая и прикладная газовая динамика труды ЦИАМ 2010. № 1341. С. 149–170.
11. Launder, B.E.; Spalding, D.B. The numerical computation of turbulent flows//Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3(2): Pp. 269–289. doi:10.1016/0045-7825(74)90029-2.
12. Секундов А.Н., Чепрасов С.А., Якубовский К.Я. Сопоставление результатов моделирования полей СО на фронте пламени методами RANS и LES. Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. № 5. С. 747. См. также: Secundov A.N., Cheprasov S.A., Yakubovskii K.Y. Comparison of simulated results for co fields at the flame front by the rans and les methods//High Temperature. 2015. Т. 53. № 5. С. 709–712.
13. Burgers J.M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion//Verh. KNAW, A/d Natuurkunde XVII. 1939. No. 2. Pp. 1–53. См. также: Бюргерс И. Об одной математической модели, иллюстрирующей теорию турбулентности. В сб. «Проблемы механики», вып. 1.
14. Красицкий В. П. Нелинейное модельное уравнение для конечных возмущений. Труды Всесоюзного симпозиума по проблемам турбулентных течений, включая геофизические приложения, Киев. 1967. С. 58–61.

15. Weinan E., Vanden E. E. Another note on forced burgers turbulence//Physics of Fluids. 2000. Vol. 12. No. 1. Pp. 149–154.
16. Век J., Frisch U., Khnanin K. Kicked Burgers turbulence//J. Fluid Mech. 2000. Vol. 416. Pp. 239–267.
17. Frachebourg L., Martin H. A. Exact statistical properties of the Burgers equation//J. Fluid Mech. 2000. Vol. 417. Pp. 323–349.
18. Фрост В. А. Расчет вырождения изотропной турбулентности с использованием аппроксимации Хассельманна. Труды Школы -семинара "Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем" ИПМех РАН. 2008. С. 171–175.
19. Frost V.A., Kaminsky V.A., Rabinovich A.B. Modeling of micromixing and the equation for correlation function. В сборнике: Micromixing in Turbulent Reactive Flows. Moscow. 2004. Pp. 51–56.
20. Фрост В.А. Зона реакции в турбулентной среде// Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С. 63–73.
21. Stewart R.W., Townsend A.A. Similarity and self-preservation in isotropic turbulence//Phil. Trans. of the Royal Soc. A. 1951. Vol. 243. No. 867. Pp.359–386.
22. Костомаха В.А. Экспериментальное моделирование изотропной турбулентности // Нестационарные задачи механики сплошных сред (Динамика сплошной среды): сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. Отд-е. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 70. С. 92–104.
23. Huang M-J., Leonard A. Power decay of homogeneous turbulence at low Reynolds number//Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. No. 11. Pp. 3765–3775.
24. Bennett J. C., Corrsin S. Small Reynolds number nearly isotropic turbulence in a straight duct and a contraction// Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. No. 12. Pp. 2129–2140.

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2017 г.