

The Realization of an Approximate Method for Calculating Convective Heat Transfer near the Surface of a GLA of a Complex Geometric Shape

V.V. Kuzenov^{1,2}, A.S. Dikalyuk¹

¹ *Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA),
Moscow, 127055, Russia*

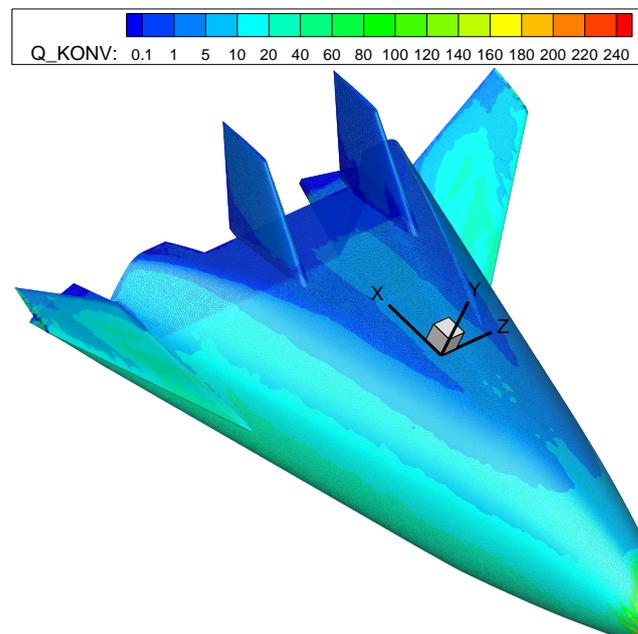
² *Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russia*

vik.kuzenov@gmail.com; aleks.dikalyuk@gmail.com

Abstract

An approximate mathematical model of heat exchange processes in a laminar and turbulent boundary layer is constructed, which appears near the surface of an aircraft moving with hypersonic velocity in the Earth's atmosphere. This mathematical model allows solving the problems of calculating convective heat transfer on the surface of a hypersonic aircraft of a complex geometric shape. Testing calculations were carried out using the example of X-33 type HFA using unstructured grids.

Keywords: mathematical model, gas dynamics, boundary layer, effective length



Distribution of convective heat flow along the surface of an aircraft of the GLA X-33 type

УДК 629.73.075

Реализация приближенного метода расчета конвективного теплообмена вблизи поверхности ГЛА сложной геометрической формы

В.В. Кузенов^{1,2}, А.С. Дикалюк¹

¹ Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова»,

Россия, Москва, 127055, ул. Суцёвская, д.22

² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

vik.kuzenov@gmail.com; aleks.dikalyuk@gmail.com

Аннотация

Построена приближенная математическая модель процессов теплообмена в ламинарном и турбулентном пограничном слое, который возникает вблизи поверхности летательного аппарата, движущегося с гиперзвуковой скоростью в атмосфере Земли. Эта математическая модель позволяет рассчитать конвективный теплообмен на поверхности гиперзвукового летательного аппарата сложной геометрической формы. Выполнены 2D варианты расчетов конвективных тепловых потоков для тел простых геометрических форм (отдельных элементов конструкции ГЛА), а также тестирующие расчеты на примере ГЛА типа X-33 с использованием неструктурированных сеток.

Ключевые слова: математическая модель, газодинамика, пограничный слой, эффективная длина

1. Введение

При разработке конструкции гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) возникает множество физических проблем, из которых выделим следующие две: влияние коэффициента трения на процесс движения с гиперзвуковой скоростью, а также определение вязких касательных напряжений на поверхности обтекаемого тела при различных режимах течения; влияние конвективного потока на теплофизические характеристики потока, обтекающего тело, и определение внешних тепловых нагрузок на конструкцию гиперзвукового летательного аппарата.

Обе указанные проблемы связаны с возникновением тепловых и динамических пограничных слоев на внешней поверхности движущегося в сплошной среде гиперзвукового летательного аппарата. Причем в случае движения летательного аппарата с гиперзвуковой скоростью градиенты скорости поперек пограничного слоя заметно возрастают (а вместе с ними и силы трения), если их сравнивать со случаем движения аппарата со сверхзвуковой скоростью. В узком (по сравнению с характерным размером обтекаемого тела) гиперзвуковом пограничном слое работа сил трения приводит к интенсивному энерговыделению, т.е. пограничный слой можно рассматривать, как узкую пространственную область, примыкающую к поверхности обтекаемого тела в которой происходит интенсивное выделение теплоты за счет процессов диссипации энергии. Эти процессы диссипации сопровождаются сильным изменением теплофизических (плотность, давление, температура, вязкость, тепло-

проводность и т.д.) и динамических свойств газа, а также тепловых потоков, направленных к поверхности летательного аппарата. Данные процессы в свою очередь требуют аналитического и численного анализа.

Целью данной работы является разработка приближенного метода оценки конвективных тепловых потоков и коэффициента трения инженерными методами для тел сложной формы (рис. 1).

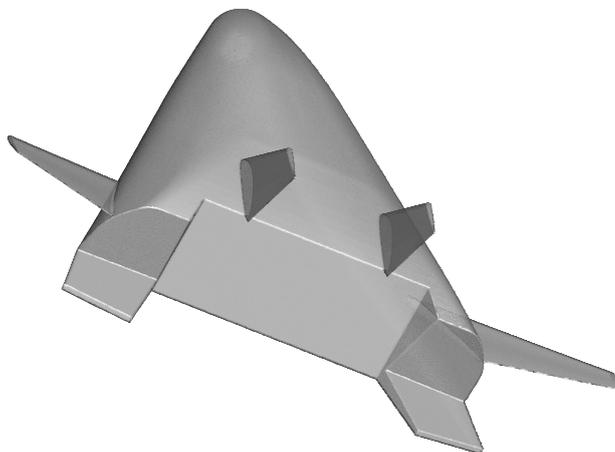


Рис. 1. Геометрическая 3D модель поверхности ГЛА X-33

Основная часть таких исследований опирается на математическую модель пограничного слоя, которая была разработана академиком В.С. Авдуевским (метод эффективной длины) [1–4, 15]. При этом используются модели ламинарного и турбулентного пограничного слоя (вопросы ламинарно-турбулентного перехода в работе не рассматриваются.). Важно отметить, что расчёту тепловых потоков должен предшествовать расчёт внешнего течения. Определение внешних тепловых нагрузок является важным этапом при определении температурных режимов конструкции ГЛА. В настоящее время существует несколько подходов к расчету конвективного теплообмена вблизи поверхности гиперзвуковых аппаратов.

Первый подход заключается в численном интегрировании полной системы уравнений Навье – Стокса. В этом случае решаются также задачи расчёта конвективного теплообмена на телах сложной формы [5, 6, 9, 10], причем и в отрывных зонах тоже. Результаты расчётов хорошо согласуются с результатами натуральных экспериментов и результатами, полученными на ударных трубах. Данное направление развития вычислительной гидро- и газодинамики является наиболее перспективным [5, 6, 9, 10]. Решение таких задач, как правило, требует больших затрат компьютерного времени. Результаты расчётов могут сильно зависеть от структуры расчётной сетки, размеров расчётной области, входных параметров, особенностей алгоритма расчета. В силу вышеперечисленных причин использование системы уравнений Навье – Стокса для оперативной первоначальной оценки тепловых потоков достаточно проблематично.

Второй способ расчёта тепловых потоков заключается в расчёте структуры пограничного слоя на основе уравнений Прандтля [15]. При больших числах Рейнольдса ($Re > 10^4 \div 10^5$) и при отсутствии зон отрыва потока течение около тел можно разбить на две области: невязкую, основную по объёму, течение в которой описывается уравнениями Эйлера, и пристеночный пограничный слой [1–4, 15]. Можно дать следующую оценку толщины пограничного слоя:

$\delta \approx 5 \cdot \sqrt{\frac{\mu \ell}{\rho U}}$, где μ – динамическая вязкость газа; ℓ – характерная длина обтекаемого объекта; ρ – характерная плотность газа; U – характерная скорость на-

бегающего потока. Отсюда видно, что толщина пограничного слоя $\delta \approx \frac{5 \cdot \ell}{\text{Re}^{0.5}}$ при

$\text{Re} = \frac{\rho U \ell}{\mu} \approx 10^5$ составляет небольшую часть характерного размера обтекаемого тела. Та-

ким образом, в первом приближении им можно пренебречь и получить невязкое поле течения в рамках системы уравнений Эйлера. Полученные газодинамические параметры на поверхности тела можно считать параметрами на внешней границе пограничного слоя. В работе [15] развиты методы расчёта плоского и трёхмерного пограничного слоя. Таким образом, задача разбивается на несколько этапов расчёта, задания граничных условий, сопряжения расчётных сеток. Однако такой способ оценки тепловых потоков является тоже достаточно трудоёмким.

Третий подход к оценке тепловых потоков предполагает определение основных характеристик пограничного слоя без определения его структуры методами локального подобия [1–6]. Для пограничного слоя на поверхности сложной формы создаётся аналогия с телом наиболее простой формы, например, пластины или конуса. При этом для каждого участка сложной поверхности подбираются геометрические параметры простых тел, закономерности развития пограничного слоя на которых известны. Для определения тепловых потоков таким способом необходимо знать распределение газодинамических параметров на внешней границе пограничного слоя. Отметим, что такой подход применим только там, где работает модель тонкого пограничного слоя. В отрывных зонах такой метод может давать качественно неверный результат, т.к. отрыв потока имеет вязкую природу [1, 15]. В литературных источниках подробно описаны методы и результаты оценки конвективных тепловых потоков методами локального подобия [5, 9, 10, 15].

Резюмируя, отметим, что основными задачами данной работы по разработке приближенного инженерного метода расчета конвективного теплообмена на поверхности ГЛА сложной геометрии являются:

- разработка алгоритмов, которые позволяют определять (вдоль линий тока на неструктурированной и структурированной сетке) характеристики пограничного слоя методами локального подобия и которые дают возможность выполнять оценки тепловых потоков, коэффициента трения и исследовать аэродинамический нагрев на телах сложной геометрии;
- оценка тепловых потоков в окрестности точки торможения;
- верификация результатов тепловых расчётов, выполненных с помощью разработанного метода на основе известных литературных данных [1–45].

2. Математическая модель приближенного метода расчета тепловых потоков к поверхности ГЛА

Академиком В.С. Авдуевским [1–3] разработан метод эффективной длины, позволяющий находить в каждой точке сложной поверхности ГЛА конвективный поток тепла $q_{w,L}$ и местный коэффициент трения C_f (суммарный коэффициент трения определяется путем интегрирования местного коэффициента по всей поверхности тела). Областью применимости метода эффективной длины являются течения при относительно больших числах Рейнольдса ($\text{Re} > 10^4 \div 10^5$). В этом случае справедлива модель тонкого пограничного слоя. Также следует отметить, что данный метод применим только в областях течения с малыми градиентами давления вдоль линии тока и при отсутствии зон отрыва.

Согласно этому методу (для ламинарного потока) эффективная длина ℓ_{eff} определяется (1) на поверхности ГЛА (здесь символ s обозначает длину кривой вдоль линии тока) соотношением [16]

$$\ell_{eff} = \frac{\int_0^x \left[\Pi^2 K^2 K_1^2 \mu_0 \rho_0 U_0 C_{p,0}^2 (T_e - T_w)^2 \text{Pr}_0^{-4/3} \right] ds}{\left[\Pi^2 K^2 K_1^2 \mu_0 \rho_0 U_0 C_{p,0}^2 (T_e - T_w)^2 \text{Pr}_0^{-4/3} \right]} \quad (1)$$

Под интегралом стоят переменные величины, изменяющиеся от начала образования пограничного слоя (критическая точка) до рассматриваемого сечения. Здесь $R_{ef}(s)$ – соответственно метрический коэффициент – средний радиус кривизны (для не осесимметричного тела), определяемый на основе соотношений дифференциальной геометрии [17] и служащий для учёта увеличения или уменьшения толщины пограничного слоя вследствие стекания или растекания линий тока; $\mu_0, \rho_0, U_0, M_0, \text{Pr}_0$ – плотность, скорость, местные числа Маха и Прандтля, взятые на внешней границе пограничного слоя в рассматриваемой точке линии тока координатой s ; T_w, T_e – температура поверхности обтекаемого тела и температура теплоизолированной стенки (2)

$$T_e = T_0 \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right), \quad r = \sqrt{\text{Pr}_0}, \quad (2)$$

где r является коэффициентом восстановления температуры (он показывает, какая доля кинетической энергии внешнего потока затрачена на повышение теплосодержания газа у поверхности обтекаемого тела).

Для ускоренных и слабо замедленных течений в выражение для эффективной длины $x_{эф}$ вводится коэффициент K_1 . Он учитывает влияние (3) продольного градиента скорости. Этот параметр близок к единице и зависит, в основном, от параметра градиента скорости и от температурного фактора [16]

$$K_1 = \left[1 + 0.16 \left(1 + \frac{T_w}{T_0^*} \right) \left(\frac{2m}{m+1} \right)^{1/3} \right]^{1/2} \quad (3)$$

Коэффициент K является фактором, учитывающим влияние сжимаемости (4)

$$K = \left(\frac{\rho_0 \mu_0}{\rho_w \mu_w} \right)^{1/3} \quad (4)$$

Значение безразмерного градиента скорости m следует из формулы (5)

$$m = \frac{x}{V_0} \frac{\partial V_0}{\partial x} \quad (5)$$

Определяющая температура T^* имеет вид (6)

$$T_0^* = T_\infty + 0.5 \cdot (T_w - T_\infty) + 0.22 \cdot (T_r - T_\infty), \quad T_r = T_0 + r \frac{V_0^2}{2(C_p)_{cp}^*}, \quad r = \sqrt{\text{Pr}_0}, \quad (6)$$

где $(C_p)_{cp}^*$ – среднее значение теплоемкости, определенное в диапазоне температур $[T, T^*]$. Значение числа Стантона можно найти с помощью соотношения (7)

$$St_{eff} = 0.332 (m+1)^{1/2} \text{Re}_{eff}^{1/2} \text{Pr}_0^{-2/3} K \cdot K_1 \quad (7)$$

В данном соотношении число Рейнольдса определяется следующей формулой (8):

$$\text{Re}_{eff} = \frac{\rho_w V_0 \ell_{eff}}{\mu_w}, \quad (8)$$

где величины ρ_w, μ_w берутся по температуре поверхности обтекаемого тела T_w .

Конвективный тепловой поток $q_{w,L}$ в ламинарном случае (9) следует из соотношения [16]

$$q_{w,L} = (C_p)_{cp}^* \rho_0 V_0 (T_e - T_w) St_{eff} \quad (9)$$

При наличии турбулентного режима (10) течения вблизи поверхности обтекаемого тела можно воспользоваться следующей формулой для расчет эффективной длины ℓ_{eff} :

$$\ell_{eff} = \frac{\int_0^x \left[\Pi^{5/4} \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{0.1375} \rho_0 U_0 \text{Pr}_0^{-0.7125} \mu_0^{0.25} C_{p,0}^{1.25} \right] (T_w/T_e)^{0.5} (T_e - T_w)^{1.25} ds}{\left[\Pi^{5/4} \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{0.1375} \rho_0 U_0 \text{Pr}_0^{-0.7125} \mu_0^{0.25} C_{p,0}^{1.25} \right] (T_w/T_e)^{0.5} (T_e - T_w)^{1.25}}, \quad (10)$$

где коэффициент восстановления температуры $r = \sqrt[3]{\text{Pr}_0}$, а величина теплового потока определяется формулой (11)

$$q_{w,L} = (C_p)_{cp}^* \rho_0 V_0 (T_e - T_w) St_{eff}, \quad \text{Re}_{eff} = \frac{\rho_w V_0 \ell_{eff}}{\mu_w} \quad (11)$$

В соотношениях (1) и (10) параметр Π принимает следующие значение: для цилиндрического случая в формуле (1) $\Pi^2 = R_{ef}^2$ и в формуле (10) $\Pi^{5/4} = R_{ef}^{5/4}$; в случае плоского течения $\Pi = R_{ef} = 1$.

Значение числа Стантона для турбулентного режима можно найти с помощью соотношения (12)

$$St_{eff} = 0.0296 \frac{1}{\text{Re}_{eff}^{0.2}} \text{Pr}_0^{-0.57} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{0.4} \left(1 + r \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{0.11} \quad (12)$$

Используя предположения работы [16], для переходной области течения число Стантона St_{eff} можно определить (13) по формуле [18]

$$St_{eff} = St_{eff, \text{мырб}} - (St_{eff, \text{мырб}} - St_{x, \text{эф. лам}}) \exp \left[- \frac{(\text{Re}_{eff} - \text{Re}_{eff, \text{нн}})}{\text{Re}_{eff, \text{нн}}} \right] \quad (13)$$

Здесь величины $St_{eff, \text{мырб}}, St_{eff, \text{лам}}$ определяются по формулам, приведенным выше по тексту; $\text{Re}_{eff, \text{нн}}$ – число Рейнольдса начало перехода от ламинарного к турбулентному течению. Для условий течения $\text{Re}_{eff} = 10^5 \div 10^6$ данная зависимость хорошо согласуется с опытными данными [18].

Существует также второй, близкий к выше изложенному, подход к определению конвективных потоков тепла $q_{w,L}, q_{w,T}$ на поверхности ГЛА, основанный на интегральных со-

отношениях теории пограничного слоя. Так согласно работам [19–22] конвективные потоки $q_{w,L}, q_{w,T}$ в пограничном слое, образующемся на поверхности тела при обтекании его гиперзвуковым потоком газа, могут быть определены с помощью формул [19–22].

В случае ламинарного течения имеем соотношения (14)

$$q_{w,L} = 0.22 \cdot \frac{(\rho^* \mu^* / \rho \mu) \rho V (H_{aw} - H_w)}{\text{Re}_L \text{Pr}^{0.6}},$$

$$g_L = \frac{0.664 \cdot \left(\int_0^s \rho^* \mu^* V r^2 ds \right)^{0.5}}{\rho V r}, \quad \text{Re}_L = \frac{\rho V g_L}{\mu} \quad (14)$$

Для турбулентного течения (15)

$$q_{w,T} = c_1 \cdot \frac{(\rho^* \mu^* / \rho \mu)^m \rho V (H_{aw} - H_w)}{\text{Re}_T^m \text{Pr}^{0.4}},$$

$$g_T = \frac{\left(c_2 \int_0^s \rho^* (\mu^*)^m V r^{c_3} ds \right)^{c_4}}{\rho V r}, \quad \text{Re}_T = \frac{\rho V g_T}{\mu}, \quad (15)$$

где Re_L, Re_T – ламинарное и турбулентное числа Рейнольдса, рассчитанные по толщине потери импульса (обозначаемую символом $g_{L,T}$) в пограничном слое; $\frac{\rho^* \mu^*}{\rho \mu} = \left(\frac{\mu^*}{\mu} \right)^2 \frac{T}{T^*}$ – данное соотношение может быть найдено либо по определяющей температуре T^* , либо по определяющей энтальпии h^* ; модуль $V = |\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ вектора скорости \vec{V} . Коэффициенты m, c_1, c_2, c_3 зависят от параметра N и находятся по формулам

$$m = \frac{2}{N+1}, \quad c_1 = \left(\frac{1}{c_5} \right)^{\frac{2N}{N+1}} \left[\frac{N}{N+1} (N+2) \right]^m, \quad N = 12.67 - 6.5 \log(\text{Re}_{L,T}) + 1.21 \left[\log(\text{Re}_{L,T}) \right]^2,$$

$$c_2 = (1+m)c_1, \quad c_3 = (1+m), \quad c_4 = c_3^{-1}, \quad c_5 = 2.2433 + 0.93 N$$

Отметим, что при практическом использовании данных соотношений необходимо уметь с необходимой степенью точности рассчитывать интегралы вида: $\int_0^s \rho^* \mu^* |V| r^2 ds$ – ла-

минарный поток; $\int_0^s \rho^* (\mu^*)^m |V| r^{c_3} ds$ – турбулентный поток, где s – расстояние вдоль линии тока по направлению потока на поверхности обтекаемого тела; r – расстояние (для осесимметричного случая) от оси x до точки $s(x, y, z)$ на поверхности $F(x, y, z)$ обтекаемого тела или метрический коэффициент (локальный средний радиус кривизны поверхности ГЛА [17]). Расчет данных интегралов позволяет найти толщину потери импульса g_L, g_T ,

которые имеют нулевое значение в точке торможения и которые нарастают по длине летательного аппарата (если считать, что расчет проводится от точки торможения).

3. Расчет термодинамических параметров вдоль линии тока

Определим термодинамические параметры, необходимые при расчете конвективных потоков (16)

$$H_{aw} = H + \frac{r^* V^2}{2}, \quad \text{Pr} = \frac{C_p \mu}{\lambda}, \quad (16)$$

Pr – число Прандтля; ρ, μ, V – плотность, динамическая вязкость, модуль скорости в потоке на границе пограничного слоя; H_{aw} – адиабатическая энтальпия или энтальпия восстановления $H_{aw} = H_r$; H_w – энтальпия, рассчитанная по температуре стенки; H – энтальпия на границе пограничного слоя; r^* – коэффициент восстановления, взятый для определяющей температуры T^* (известно, что коэффициент восстановления r^* мало зависит от числа Маха и температуры невозмущенного потока [23]).

Из опыта известно, что рассматриваемая зависимость для H_{aw} хорошо аппроксимируется, если в неё ввести число Прандтля, найденное для определяющей температуры T^* [23]: для ламинарного течения $r^* = \sqrt{\text{Pr}^*}$, для турбулентного течения $r^* = \sqrt[3]{\text{Pr}^*}$. Здесь число Прандтля $\text{Pr}^* = \frac{C_p^* \mu^*}{\lambda^*}$ находится при значении определяющей температуры T^* , т.е. значения удельной теплоемкости C_p^* , динамической вязкости μ^* и теплопроводности λ^* находятся по величине T^* .

Термодинамические функции и кинетические параметры вычисляются в зависимости от определяющей температуры T^* по формулам (17)

$$\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^n, \quad \frac{\lambda^*}{\lambda_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty} \right)^\chi \quad (17)$$

Если газ состоит из атомов, то удельная теплоемкость (на единицу массы) равна (в этом случае существуют только три степени свободы для поступательного движения)

$$C_{v,j} = \frac{3}{2}k, \quad [\text{Дж К}^{-1}]; \quad C_{v,j}N_A, \quad [\text{Дж моль}^{-1} \text{К}^{-1}],$$

где $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авогадро.

Когда газ состоит из двухатомных молекул (типа: $\text{N}_2, \text{O}_2, \text{H}_2$), то у молекулы имеются 3 поступательные, 2 вращательных степени свободы ($i_2 = 2$), 1 колебательная степень свободы ($i_3 = 1$). При этом колебательное движение многоатомных молекул заметно сложнее, чем колебательное движение двухатомных молекул: число колебательных степеней свободы составляет $3n - 6$ у нелинейных многоатомных молекул и $3n - 5$ у линейных многоатомных молекул. В том случае, если температура газа заметно выше характеристической температуры, то $C_{\text{вр},j} \rightarrow i_2 \frac{k}{2}$, [Дж К⁻¹], а $C_{\text{кл},j} \rightarrow i_3 k$, [Дж К⁻¹]. Величина $C_{p,j}$ находится с помощью соотношения: $C_{p,j} = \gamma C_{v,j}$.

Более точным [24] способом аппроксимации термодинамических свойств индивидуальных химических компонентов является представление их полиномами вида (18)

$$\Phi_j = \varphi_{1,j} + \varphi_{2,j} \ln x + \varphi_{3,j} x^{-2} + \varphi_{4,j} x^{-1} + \varphi_{5,j} x + \varphi_{6,j} x^2 + \varphi_{6,j} x^2,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_j &= (\varphi_{2,j} - 2\varphi_{3,j}x^{-2} - \varphi_{4,j}x^{-1} + \varphi_{5,j}x + 2\varphi_{6,j}x^2 + 3\varphi_{7,j}x^3) \frac{1}{x}, \\ \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_j &= (-\varphi_{2,j} + 6\varphi_{3,j}x^{-2} + 2\varphi_{4,j}x^{-1} + 2\varphi_{6,j}x^2 + 6\varphi_{7,j}x^3) \frac{1}{x^2}, \\ h_j &= xT \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_j + \varphi_{8,j} \times 10^3, \text{ Дж/моль}, \\ C_{p,j} &= 2x \left(\frac{d\Phi}{dx}\right)_j + x^2 \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right)_j, \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \end{aligned} \quad (18)$$

где $P_0 = 101325$ Па, $x = T \times 10^{-4}$ К. Константы аппроксимации в температурном диапазоне $298 \div 20000$ К представлены в [24]; Φ_j – приведенная энергия Гиббса; $C_p = \sum_i^{N_s} Y_i C_{p,i}$; N_s – число химических компонентов смеси газов; Y_i – массовая доля i -го компонента смеси; $C_{p,i}, h_i$ – удельная теплоемкость при постоянном давлении, энтальпия и плотность i -го компонента смеси. Заметим, что при температурах в ударном слое выше ~ 10000 К предпочтительнее использовать иную формулировку термодинамической модели, разделив поступательную, электронную, колебательную и вращательную составляющие полной и внутренней энергии.

Полагая, что давление по толщине пограничного слоя не изменяется соотношение для плотностей можно получить (19) с использованием уравнения состояния [23]

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{\mu^*}{\mu} \frac{T}{T^*}, \quad \frac{\rho^* \mu^*}{\rho \mu} = \left(\frac{\mu^*}{\mu}\right)^2 \frac{T}{T^*} \quad (19)$$

Относительную величину динамической вязкости $\frac{\mu^*}{\mu}$ можно определить с помощью степенной зависимости вида (20)

$$\frac{\mu^*}{\mu_\infty} = \left(\frac{T^*}{T_\infty}\right)^\omega, \quad \omega \in [0.5; 1] \quad (20)$$

Величина ω зависит от выбранной модели взаимодействия молекул. Для модели гладких упругих шаров $\omega = 0.5$, для модели Максвелла $\omega = 1$. При этом при возрастании температуры T^* величина ω уменьшается.

Эккерт Э.Р. [23] предложил формулу для определения эталонной определяющей температуры T^* , которая дает удовлетворительные результаты до чисел Маха $M \approx 15$. Формула для эталонной температуры имеет вид (21)

$$T^* = T_\infty + 0.5 \cdot (T_w - T_\infty) + 0.22 \cdot (T_r - T_\infty) \quad (21)$$

При больших скоростях обтекания, когда в пограничном слое существенное значение имеют физико-химические превращения, в основу расчета следует положить определяющую энтальпию h^* , по которой вычисляются другие определяющие параметры (22)

$$h^* = h_\infty + 0.5 \cdot (h_w - h_\infty) + 0.22 \cdot (h_r - h_\infty) \quad (22)$$

Возможны и другие соотношения (23) для расчета определяющей энтальпии h^* и адиабатической энтальпии H_{aw} (по температуре восстановления T_r)

$$h^* = h + (C_p)_{cp}^* \cdot (T^* - T), \quad T_r = T + r^* \frac{V^2}{2(C_p)_{cp}^*}, \quad (23)$$

где $(C_p)_{cp}^*$ – среднее значение теплоемкости, определенное в диапазоне температур $[T, T^*]$, T – температура сплошной среды на границе пограничного слоя.

4. Отдельные математические аспекты приближенного метода расчета тепловых потоков к поверхности ГЛА

С вычислительной точки зрения всю выше изложенную методику расчета аэродинамического нагрева ГЛА сложной геометрической формы, можно представить в виде нескольких шагов:

- 1) поиск точки торможения (критической точки) на поверхности ГЛА сложной геометрической формы для произвольных условий обтекания;
- 2) определение линии тока для любой точки на поверхности ГЛА (заданной с помощью неструктурированной расчетной сетки), как по направлению потока, так и против направления течения газовой среды. Формулировка алгоритма локализации положения точки на линии тока относительно 2D конечно - элементного разбиения поверхности ГЛА;
- 3) нахождение метрических коэффициентов на основе соотношений дифференциальной геометрии [17];
- 4) расчет по направлению течения потока (вдоль найденной линии тока) с необходимой для практических нужд степенью точности определенных интегралов, входящих в соотношения (1)–(23);
- 5) отдельный от основного способ расчета конвективного потока тепла вблизи критической точки.

Перед тем, как обсудить сформулированные пункты, напомним еще раз, что для определения конвективных тепловых потоков на основе приближенной физико-математической модели азротермодинамики ГЛА необходимо вначале рассчитать (на основе трехмерных уравнений Эйлера) распределения газодинамических параметров (ρ, \vec{V}, P) на внешней границе пограничного слоя, который располагается вблизи поверхности обтекаемого тела.

Важным этапом численного моделирования конвективного теплообмена на поверхности ГЛА является генерация расчетной поверхностной сетки, которая производится с использованием информации о геометрической 3D модели поверхности ГЛА (рис. 1). При этом заметную сложность представляет дискретизация составной поверхности, состоящей из NURBS сегментов, содержащих разрывы и сложные границы. Эта задача решается путем построения треугольной сетки на поверхности ГЛА, используя алгоритмы двумерной триангуляции в сочетании с параметрическими отображениями. Таким образом, в трехмерном варианте приближенной физико-математической модели поверхность обтекаемого тела разбивается на множество треугольников – фасеток. Вершины фасеток называются узлами. Все фасетки однозначно сопряжены друг с другом через ребра фасеток. Отсутствие дефектов на триангулированной поверхности является важным условием для корректной работы алгоритма расчёта. Использование поверхностной неструктурированной сетки для оценок тепловых потоков на основе приближенной физико-математической модели позволяет исследовать аэродинамический нагрев ГЛА сложных геометрических форм. Эта технология (в принципе) дает возможность не вводить общую криволинейную систему координат (s, β, n) , связанную с геометрической формой обтекаемого тела, а газодинамические пара-

метры задавать в своей собственной, независимой системе координат (u, v, s) только для отдельной произвольной фасетки.

Поиск точки торможения на поверхности ГЛА в данной методике основывается на нахождении точки экстремума статического давления и использует метод минимизации функции нескольких переменных: симплекс-метод или метод минимизации по заданным направлениям.

Определение линии тока для произвольной точки на поверхности ГЛА базируется на численном (применяется явный метод Эйлера) решении векторного обыкновенного дифференциального уравнения (24)

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}, \quad \vec{X}(t=t_s) = \vec{X}_s, \quad \vec{X}(t) = (x, y, z)^T, \quad \vec{V}(t) = (u, v, w)^T \quad (24)$$

Здесь отметим, что для сохранения точности и корректной работы алгоритма шаг $\Delta\vec{X}$, с которым восстанавливается линия тока, должен быть меньше характерного размера фасетки.

Для поиска решения уравнения (24) в каждом узле расчетной поверхностной неструктурированной сетки необходимо задать газодинамические параметры потока: P – давление; T – температура и u, v, w – компоненты вектора скорости $\vec{V}(t)$. Предполагая, что являются известными значения газодинамических параметров потока в центре тетраэдра, значения данных параметров в узлах сетки (фасетки) можно найти [25] с помощью консервативной линейной интерполяции (25)

$$F_p \approx \frac{\sum F_i V_i}{\sum V_i} \quad (25)$$

Здесь F_i – значение функции в центре i -го тетраэдра; V_i – его объем. Суммирование ведется по всем тетраэдрам, которые включают в себя вершину P .

Внутри фасетки все газодинамические параметры определяются линейной интерполяцией с использованием линейных базисных функций $N_k^i(r_j)$: $F(r_j) = \sum_{k=1}^{d+1} N_k^i(r_j) F(r_k^i)$, здесь $F(r_j)$ – значения интерполируемого параметра, заданные в вершинах фасетки.

Для двух пространственных переменных [25] в локальной системе координат (u, v, s) для произвольного 2D конечного элемента (фасетки) C_i с локальной нумерацией узлов (вершин) $k=1,3$ линейные базисные функции $N_k^i(r_j)$ определяются соотношениями (26)

$$N_k^i(r) = \alpha_k^i + \beta_k^i x^* + \gamma_k^i y^*, \quad N_k^i(r_m^i) = \delta_{km} \quad (26)$$

При заданном [25] разбиении (триангуляции) 2D поверхности обтекаемого тела на множество треугольников имеем на каждой фасетке три (равной числу узлов в фасетке) системы линейных алгебраических уравнений (27)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1^{*,i} & y_1^{*,i} \\ 1 & x_2^{*,i} & y_2^{*,i} \\ 1 & x_3^{*,i} & y_3^{*,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k^i \\ \beta_k^i \\ \gamma_k^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,k} \\ \delta_{2,k} \\ \delta_{3,k} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Коэффициенты данной линейной формы вычисляются, как решения систем линейных алгебраических уравнений, определитель Δ_i которых имеет вид (28)

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{*,i} & y_1^{*,i} \\ 1 & x_2^{*,i} & y_2^{*,i} \\ 1 & x_3^{*,i} & y_3^{*,i} \end{vmatrix} = (x_2^{*,i} - x_1^{*,i})(y_3^{*,i} - y_1^{*,i}) - (x_3^{*,i} - x_1^{*,i})(y_2^{*,i} - y_1^{*,i}), \quad (k = \overline{1,3}) \quad (28)$$

Для фасеток, имеющих конечную площадь, данная система однозначно разрешима и её решение можно найти методом Крамера [25] или подходящим численным методом.

При расчете линии тока для произвольной точки на поверхности ГЛА необходимо выполнить формулировку алгоритма локализации положения произвольной точки, располагающейся на линии тока относительно 2D конечно- элементного разбиения поверхности ГЛА. Эффективные процедуры для локализации линии тока на неструктурированной сетке, состоящей из треугольных элементов в случае двух пространственных измерений, и тетраэдров в трехмерном, приведены в работе [25]. Эти процедуры основываются на идеи последовательного поиска положения рассчитанной (для момента времени $t_n + \Delta t$) по уравнению (24) точки линии тока в ближайших соседних ячейках после ее смещения из исходной фасетки на очередном временном шаге $t_n + \Delta t$. Для этого используются локальные базисные функции $N_k^i(r_j)$ (26), которые выполняют здесь роль локальных координат. При этом предполагается [25], что при заданном 2D конечно- элементном разбиении поверхности ГЛА в каждой фасетке вводится (29)–(32) своя собственная, локальная система координат (u, v, s) , в которой для каждого из 2D элементов по координатам узлов (вершин) вычислены (с использованием систем (27)) локальные базисы N_k^i .

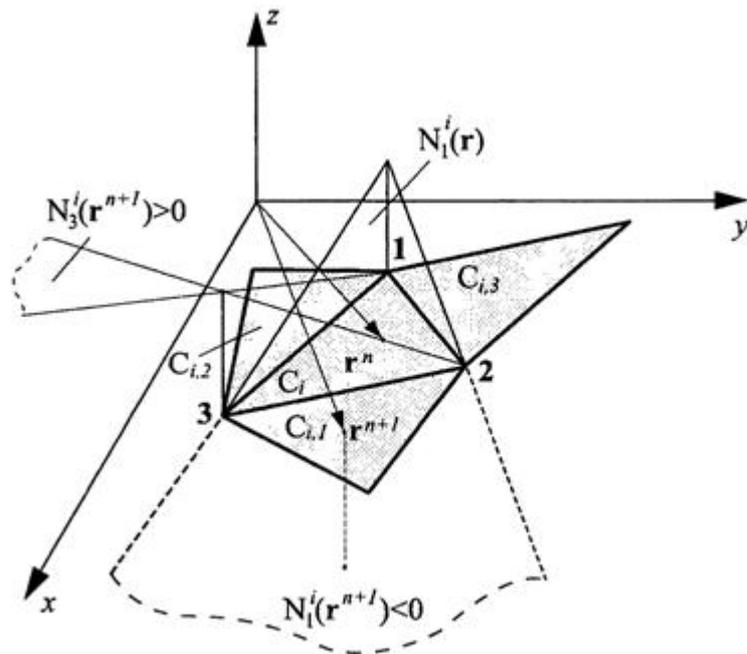


Рис. 2. Поиск положения линии тока в триангулированной области

Сформулируем критерий локализации в фасетке, принадлежащей 2D конечно-элементному разбиению поверхности ГЛА, произвольной точки линии тока [25].

Пусть центр точки на линии тока в момент времени t_n находится в точке $r^n \in C_i$ (здесь C_i обозначает произвольную фасетку на поверхности обтекаемого тела). В соответствии с определением линейных базисных функций для любых $r \in C_i$ для всех $k = 1, \dots, d + 1$

базисные функции $0 \leq N_k^i(r) \leq 1$. Отсюда (рис. 2), если для $n+1$ момента времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ выполняются соотношения $\min N_k^i(r^{n+1}) \geq 0$ и $\max N_k^i(r^{n+1}) \leq 1$, $k = \overline{1, d+1}$, то точка $r^{n+1} \in C_i$ располагается в фасетке C_i . Если же хотя бы для одного из узлов (вершин) $\min N_k^i(r^{n+1}) < 0$, то точка r^{n+1} не располагается в фасетке $r^{n+1} \notin C_i$. Тогда в случае двух пространственных измерений [25], если $r^{n+1} \notin C_i$, поиск следует продолжить в соседнем элементе (рис. 2), противолежащем k -й вершине элемента C_i , для которой $N_k^i(r^{n+1}) = \min_{\ell} N_{\ell}^i(r^{n+1}) < 0$.

Сделаем несколько замечаний о переходе к собственной (связанной с 2D конечным элементом-фасеткой), локальной независимой (от исходной декартовой системы координат) системе координат (u, v, s) для некоторой произвольной фасетки. Для такого перехода можно использовать матрицы 3-го порядка $[T]$, $[R_x]$, $[R_y]$, углы Эйлера θ, ψ , и перенос исходной декартовой системы координат (x, y, z) в "центр масс" фасетки (x_m, y_m, z_m) .

Для этого выполним следующую последовательность базовых преобразований (полное преобразование получается композицией базовых преобразований [26]):

- перенос вектора V в начало координат (преобразование $[T]$);
- поворот оси Z на угол ψ вокруг оси X (преобразование $[R_x]$);
- поворот преобразованной системы координат вокруг оси Y на угол θ (преобразование $[R_y]$).

Перенос вектора V в начало (29) локальной системы координат (u, v, s)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_m & -y_m & -z_m & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Здесь символы x_m, y_m, z_m обозначают координаты (в исходной декартовой системе координат (x, y, z)) геометрического "центра масс" фасетки.

Поворот (30) оси z на угол ψ вокруг оси x исходной декартовой системы координат (x, y, z)

$$\cos(\psi) = \frac{n}{d}, \quad \sin(\psi) = \frac{m}{d}, \quad d = \sqrt{n^2 + m^2},$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Поворот (31) преобразованной системы координат вокруг оси y на угол θ

$$\cos(\theta) = d, \quad \sin(\theta) = \ell,$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Результатирующее линейное преобразование имеет следующий вид (32):

$$[u \ v \ s \ 1] = [x \ y \ z \ 1][T][R_x][R_y] \quad (32)$$

Здесь (u, v, s) – обозначают значения координат некоторой точки в фасетке в локальной, связанной с произвольной фасеткой системе координат; (x, y, z) – значение координат этой же точки в исходной декартовой системе координат.

Заметим, что здесь вращение (на углы ψ и θ) осуществляется вокруг некоторой прямой с направляющим вектором $V(\ell, m, n)$, где $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Расчет интегралов, входящих в выражения (1)–(23), требует нахождения метрических коэффициентов (локального среднего радиуса кривизны), входящих в подинтегральную функцию. Напомним основные положения, применяемые при нахождении локального среднего радиуса кривизны гладкой криволинейной поверхности [17].

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве задана локально гладкая или регулярная поверхность S . Такое задание возможно, если в свою очередь задано векторное соотношение (33)

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad (u, v) \in U \times V \quad (33)$$

Здесь U, V – интервалы изменения переменных u, v . Будем предполагать также, что для интервалов U, V существуют непрерывные производные $\vec{r}_u = \partial \vec{r}(u, v) / \partial u$, $\vec{r}_v = \partial \vec{r}(u, v) / \partial v$, которые удовлетворяют дополнительному условию вида: $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$. Тогда на поверхности S можно задать кривую $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, $(u, v) \in U \times V$, ввести её дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$, а также вектор единичной нормали $\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$. При этом квадрат дифференциала длины дуги ds^2 определяет (34) первую основную квадратичную форму поверхности S [17]

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2, \quad (34)$$

где

$$E(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad F(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G(u, v) = \vec{r}_v \times \vec{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

Определим дифференциал единичной нормали выражением $d\vec{N} = \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv$ и введем следующие обозначения [17]:

$$L(u, v) = -\vec{r}_u \times \vec{N}_u = \frac{[r_{uu}, r_u, r_v]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M(u, v) = -\vec{r}_u \times \vec{N}_v = \frac{[r_{uv}, r_u, r_v]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N(u, v) = -\vec{r}_v \times \vec{N}_v = \frac{[r_{vv}, r_u, r_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Тогда средний локальный радиус кривизны R_{ef} можно найти [17] следующим образом (35):

$$K = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad R_{ef} = \frac{1}{K} \quad (35)$$

Отметим, что в том случае, когда поверхность S задана в трехмерном евклидовом пространстве с метрикой $du^2 + dv^2 + ds^2$, как график дифференцируемой функции $s = f(u, v)$, соотношение (35) приобретает [28] следующую симметричную форму (36):

$$K = \frac{1}{2} \frac{(1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_v^2) f_{uu}}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}}, \quad R_{ef} = \frac{1}{K} \quad (36)$$

Частные производные $f_u, f_v, f_{uv}, f_{uu}, f_{vv}$ входящие в соотношение (36), можно найти методом наименьших квадратов для функции $f(u, v)$, содержащей квадратичные слагаемые (37) и приближающей форму поверхности S в точке (u, v)

$$f(u, v) \approx f(u_j, v_j) + f_u(u - u_j) + f_v(v - v_j) + f_{uu} \frac{(u - u_j)^2}{2} + f_{uv}(u - u_j)(v - v_j) + f_{vv} \frac{(v - v_j)^2}{2} \quad (37)$$

Применяя метод наименьших квадратов к выражению (37), можно сформулировать следующую систему линейных алгебраических уравнений (38) для нахождения производных $\vec{c} = (f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv})^T$

$$P\vec{c} = \vec{Q}, \quad P_{kj} = \sum_{i=1}^m \varphi_k(t_i) \varphi_j(t_i), \quad Q_k = \sum_{i=1}^m \varphi_k(t_i) (f_i - f_j) \quad (38)$$

где $\varphi_j = \left\{ (u - u_j), (v - v_j), (u - u_j)^2, (u - u_j)(v - v_j), (v - v_j)^2 \right\}$, $\vec{c} = (f_u, f_v, f_{uu}, f_{uv}, f_{vv})^T$.

При практическом использовании соотношений (1)–(23) следует также рассчитать интегралы вида: $\int_0^s \rho^* \mu^* |\bar{V}| r^2 ds$ – ламинарный поток; $\int_0^s \rho^* (\mu^*)^m |\bar{V}| r^{c_3} ds$ – турбулентный поток.

Значения данных интегралов необходимо получить в каждой точки (кроме точки торможения) поверхности ГЛА. Следуя выводам работы [27] можно считать, что наиболее предпочтительным в данной ситуации является адаптивный метод Ньютона – Котеса, представляющий собой семейство квадратурных формул, получаемых интегрированием интерполяционных полиномов, построенных по равноудаленным узлам, а в качестве метода интерполяции подинтегральной функции можно использовать кубическую сплайн интерполяцию [29]. При этом вблизи критической точки возможно (в ламинарном случае) приближенно определить значение интеграла $\int_0^s \rho^* \mu^* V r^2 ds$.

В этом случае подход основывается на следующих

предположениях [20–22]: во-первых, величины ρ^* и μ^* не значительно изменяются вдоль линии тока и могут с хорошим приближением быть заменены их значениями в критической точке $\rho^* \mu^* = (\rho^* \mu^*)_s$; во вторых величина модуля скорости V (напомним, в критической точке $V_s = 0$) и энтальпии h могут быть представлены линейной зависимостью: $V \approx (dV/ds)_s s$, $h \approx (dh/ds)_s s$. Таким образом, параметр g_L вблизи критической точки ($s \approx S_\varepsilon$) можно рассчитать приближенным способом (39):

$$\int_0^{S_\varepsilon} \rho^* \mu^* V h^2 ds = \int_0^{S_\varepsilon} (\rho^* \mu^*)_s \left(\frac{dV}{ds} \right)_s \left(\frac{dh}{ds} \right)_s^2 s^3 ds \approx (\rho^* \mu^*)_s V_\varepsilon h_\varepsilon^2 \frac{1}{S_\varepsilon^3} \int_0^{S_\varepsilon} s^3 ds = (\rho^* \mu^*)_s V_\varepsilon h_\varepsilon^2 \frac{S_\varepsilon}{4} \quad (39)$$

Предложенный выше алгоритм расчета тепловых потоков вблизи критической точки имеет особенность типа $\frac{0}{0}$. По этой причине вблизи точки торможения (критической точки) предлагается воспользоваться (40) упрощенной формулой Фейя и Риддела [30,31]:

$$q_w = 2.3 \times 10^7 \sqrt{\frac{1}{R_n} \left(\frac{V_\infty}{10^6} \right)^{3.15}} \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho_0}}, \text{ Вт/см}^2, \quad (40)$$

где $\rho_0 = 1.23 \times 10^{-3}$, г/см³. Либо следует применить прямое выражение (41), которое описывает перенос энергии через неподвижный (вблизи критической точки) диссоциирующий газ с градиентами температуры ∇T и концентрации ∇c_i [31]:

$$q_{w,i} = -\lambda_i \nabla T - \rho D_i h_i^0 \nabla c_i, \quad (41)$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности i -го компонента смеси; ρ, T – плотность и температура сплошной среды на границе пограничного слоя; h_i^0 – удельная энергия диссоциации на единицу массы i -го компонента смеси; D_i – коэффициент диффузии i -го компонента смеси; c_i – массовая доля i -го компонента смеси.

Приведем один из способов расчета аэродинамических коэффициентов сил, действующих на ГЛА. Пусть на единичный элемент dS поверхности S действует сила давления $d\vec{F}_p$, направленная по нормали \vec{n} к поверхности S . Эта сила может быть найдена с помощью выражения: $d\vec{F}_p = (P - P_\infty) \vec{n} dS$. Тогда аэродинамический коэффициент давления \overline{C}_p можно найти с помощью формулы

$$\overline{C}_p = \frac{\vec{F}_p / S_{mid}}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2} = \frac{\frac{1}{S_{mid}} \iint_S (P - P_\infty) \vec{n} dS}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2},$$

где S_{mid} – площадь миделя ГЛА; $\rho_\infty, P_\infty, V_\infty$ – плотность, давление и скорость в невозмущенном, набегающем на ГЛА газовом потоке.

Значения компонент аэродинамического коэффициента \overline{C}_p в осевом C_{px} и поперечном C_{py} направлениях получаются с помощью проецирования нормали \vec{n} к регулярной поверхности S на направляющие векторы ортов e_x, e_y декартовой системы координат X, Y, Z :

$$C_{px} = \frac{\frac{1}{S_{mid}} \iint_S (P - P_\infty) (\vec{n} e_x) dS}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2}, \quad C_{py} = \frac{\frac{1}{S_{mid}} \iint_S (P - P_\infty) (\vec{n} e_y) dS}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2},$$

где e_x, e_y – направляющие векторы ортов декартовой системы координат X, Y, Z .

При вязком обтекании ГЛА (и соответствующем вязком расчете) на единичный элемент dS поверхности S действует сила трения $d\vec{F}_f$, направленная вдоль касательной к поверхности ГЛА коллинеарно вектору скорости. Эту силу можно найти следующим образом: $d\vec{F}_f = \tau_w \vec{V} dS$, где τ_w – напряжение трения, определяемое вязкими силами, \vec{V} – единичный вектор, касательный к поверхности S . Тогда коэффициенты поверхностного трения C_{fx}, C_{fy} записываются следующим способом:

$$C_{fx} = \frac{\frac{1}{S_{mid}} \iint_S (\vec{V} e_x) \tau_w dS}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2}, \quad C_{fy} = \frac{\frac{1}{S_{mid}} \iint_S (\vec{V} e_y) \tau_w dS}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2}$$

Суммарные аэродинамические коэффициенты C_x , C_y можно представить так

$$C_x = C_{px} + C_{fx}, \quad C_y = C_{py} + C_{fy}$$

При движении ГЛА под углом атаки α аэродинамические коэффициенты определяются формулами

$$C_{xa} = C_x \cos \alpha + C_y \sin \alpha, \quad C_{ya} = -C_x \sin \alpha + C_y \cos \alpha$$

Здесь C_{xa} – аэродинамический коэффициент силы лобового сопротивления, C_{ya} – аэродинамический коэффициент подъемной силы.

5. Некоторые результаты расчета

Процесс валидации и верификации, сформулированной выше инженерно-физико-математической модели теплообмена вблизи поверхности ГЛА, можно разбить на несколько этапов:

- 2D тестирование разработанной инженерно-физико-математической модели (1)–(23) и численного метода решения уравнений Эйлера с использованием тел простых геометрических форм;
- 3D валидация и верификация, разработанной методики (1)–(23), на примере ГЛА сложной геометрической формы с использованием неструктурированных сеток.

Для 2D тестирования, разработанной инженерно-физико-математической методики ГЛА (1)–(23), здесь используется следующий набор тел простых геометрических форм (отдельных элементов конструкции ГЛА):

- ✓ клин, сопряженный с пластиной;
- ✓ конус, сопряженный с цилиндром;
- ✓ цилиндр, сопряженный с пластиной;
- ✓ конус затупленный по сфере и сопряженный с цилиндром;
- ✓ гиперзвуковое обтекание затупленных осесимметричных тел (в этом случае можно использовать расчетные и экспериментальные данные работы [32]).

При 2D тестировании поиск решения, соответствующего высокотемпературному гетерогенному течению газа вблизи поверхности ГЛА, можно проводить на основе решения нестационарных двумерных одножидкостных (однотемпературных) уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью RANS ($q-\omega$ модель Кокли) моделей турбулентности, с учетом процессов диффузии и теплопроводности [33]. Частным случаем такой системы уравнений является система уравнений Эйлера. Расчетная область включает в себя поле течения в невозмущенном потоке, за фронтом ударной волны, в следе за обтекаемым телом. Процедура численного решения уравнений Эйлера с помощью нелинейной квазимоноотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности описана в работе [34] и состоит из трех этапов:

- интегрирования уравнений относительно временной переменной t и перехода на новый временной слой $t + \Delta t$;
- реконструкция значений переменных на гранях расчетных ячеек из значений в центрах ячеек;
- вычисление численных потоков через грани расчетных ячеек путем точного или приближенного решения задачи о распаде разрыва (или её аналога) между значениями на двух (противоположных) сторонах каждой грани.

Для 2D тестирования численного метода решения уравнений Эйлера использовались следующие параметры потока воздуха, натекающего на тело простой геометрической формы:

Давление в натекающем потоке	$P = 2060$ Па
Скорость в натекающем потоке	$V = 1860$ м/с
Температура в натекающем потоке	$T = 223$ К
Число Маха в натекающем потоке	$M = 6$
Состав, натекающего на тело газа	Air
Высота от поверхности Земли	$H = 25$ км

Все газодинамические характеристики за плоским или коническим скачком уплотнения (рассматривается обтекание клина, сопряженный с пластиной или конуса, сопряженного с цилиндром), определяются [1] (при заданном числе Маха невозмущенного потока газа M_∞) углом раствора клина или конуса β , обтекаемого сверхзвуковым потоком газа, и углом наклона α фронта ударной волны (рис. 1).

В плоском случае [1] зная угол α (рис. 3) можно определить число Маха $M_{\infty,n}$, которое рассчитывается по нормальной (к фронту ударной волны) компоненте скорости. Данное значение числа Маха $M_{\infty,n}$ позволяет найти значения всех газодинамических переменных за фронтом ударной волны.

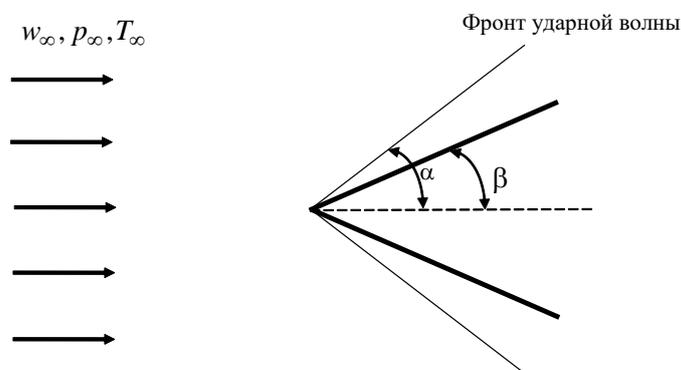


Рис. 3. Схема расположения фронта ударной волны относительно клина или конуса в случае сверхзвукового течения газа при нулевом угле атаки

В случае сверхзвукового обтекания конуса [35] для 2D тестирования численного метода решения уравнений Эйлера можно воспользоваться графической зависимостью угла наклона β ударной волны от угла отклонения сверхзвукового потока газа при разных значениях числа M_∞ . Отметим здесь также, что ввиду того что толщина скачка уплотнения очень мала формулы для расчета газодинамических параметров за фронтом плоскопараллельного косоугольного скачка (P_2/P_∞ , ρ_2/ρ_∞ , w_2/w_∞ и т.д.) применимы и к расчету параметров за осесимметричной ударной волной (пространственные эффекты поперек фронта УВ малы).

Из анализа графических зависимостей, показанных на рис. 4 и рис. 5, следует, что погрешности в отклонении угла наклона β ударной волны составляет величину $\leq 1\%$, а в газодинамических величинах порядка 3 %.

Вторая группа 2D тестов численного метода решения уравнений Эйлера основывается на расчете и сравнении [14, 36–40] векторных и скалярных полей газодинамических параметров, оценке отхода ударной волны Δ , величины радиуса кривизны ударной волны R_s на оси симметрии для сферы (рис. 7) или цилиндра (рис. 6). Сравнение проводилось для случая обтекания цилиндра (рис. 6), сопряженного с пластиной, и сферы (рис. 7), сопряженной цилиндром, потоком равновесно-диссоциирующего воздуха или совершенного газа для широкого диапазона условий при числах Маха $M \geq 6$. Это сравнение показало, что по газодинамическим характеристикам величина ошибки составляет 5 %; ошибка в отходе Δ и в кривизне R_s ударной волны составляет соответственно 9 % и 8.5 %.

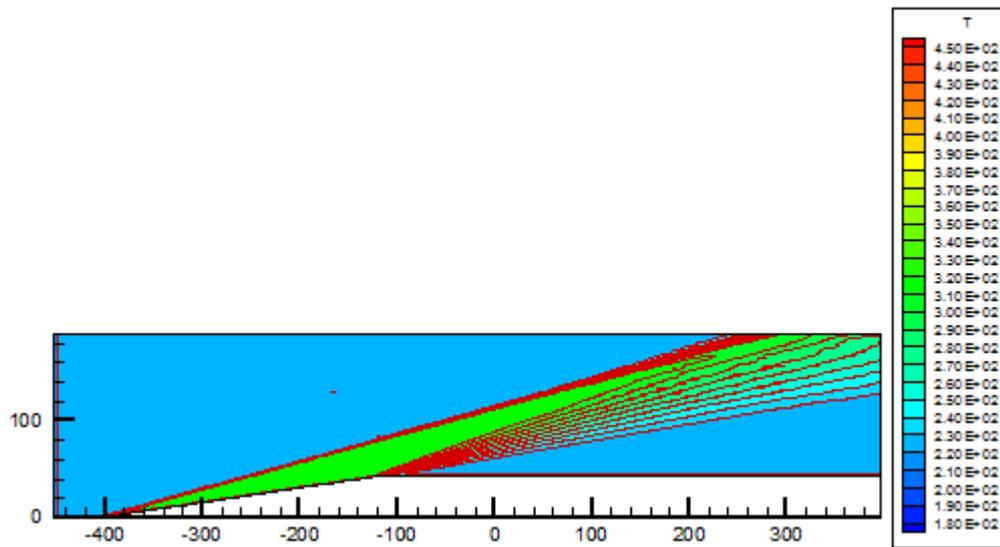


Рис. 4. Распределение температуры при обтекании острого клина

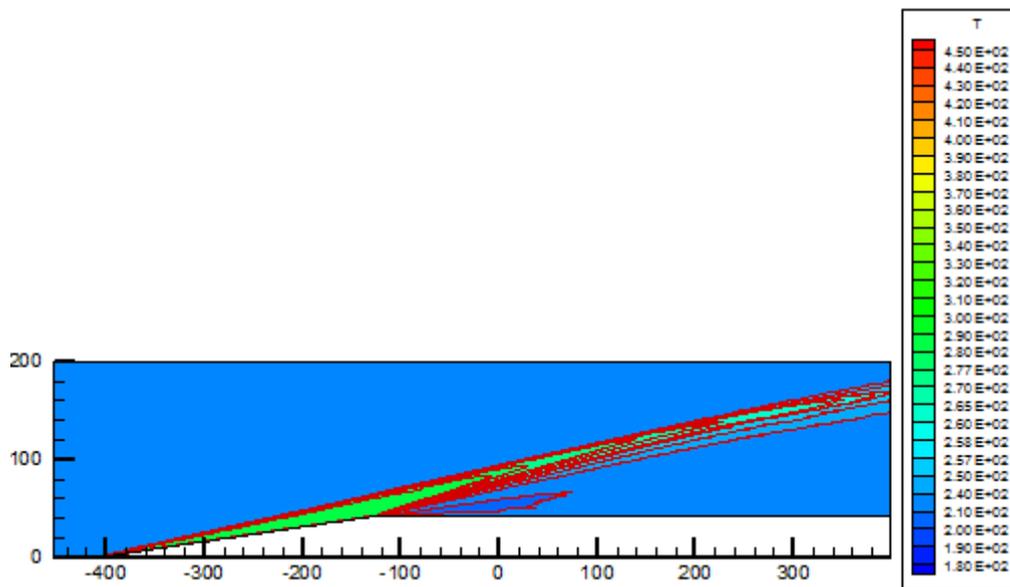


Рис. 5. Распределение температуры при обтекании острого конуса

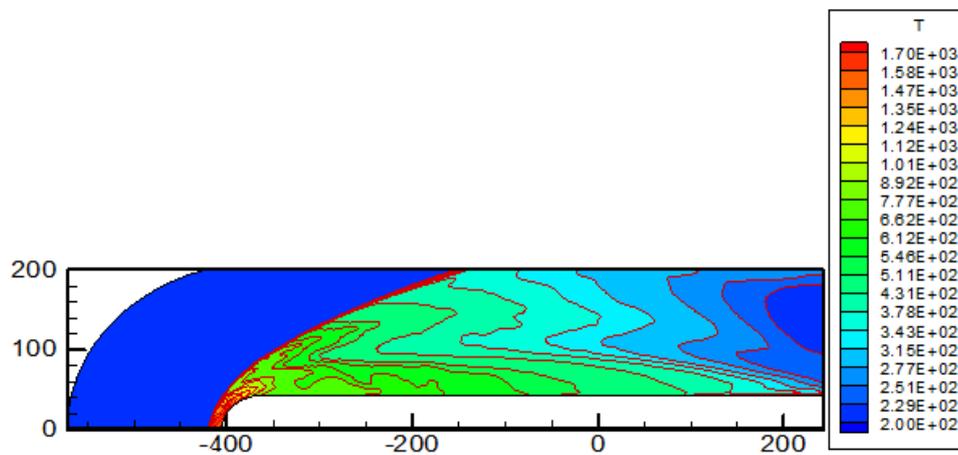


Рис. 6. Распределение температуры при обтекании цилиндра, сопряженного с пластиной

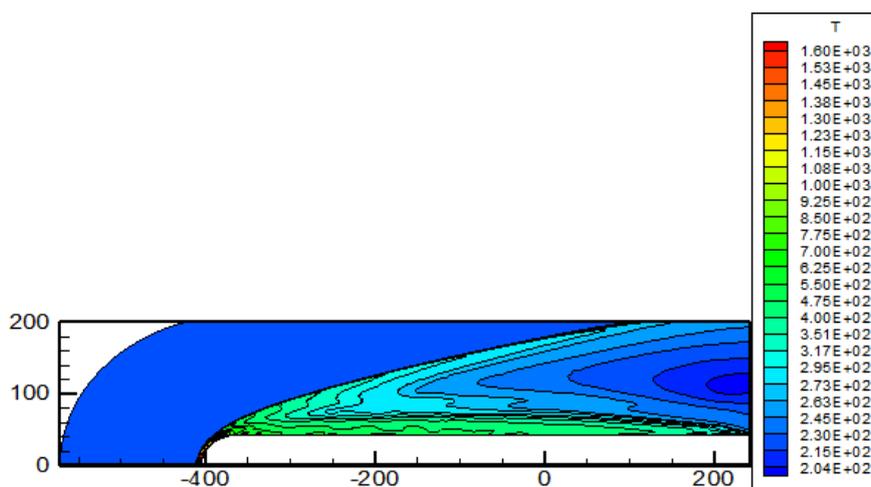


Рис. 7. Распределение температуры при обтекании сферы, сопряженной цилиндром

Для целей 2D валидации и верификации математической модели теплообмена (1)–(23) при гиперзвуковом обтекании затупленных осесимметричных тел использовались расчетные и экспериментальные данные, приведенные в работе [32]. Исходные данные для выполненных в работе [32] расчетов указаны в таблицах 1 и 2. Данные расчеты выполнены для чисел Маха $M = 6 \div 20$ и высот полета $h = 22$ км и $h = 37$ км в атмосфере Земли.

Таблица 1

Параметры воздушной атмосферы

Параметр	Значение	Значение	Размерность
Высота полета	22	37	км
Давление набегающего потока	0.405×10^5	0.433×10^4	Эрг/см ³ (Тор)
Температура набегающего потока	219	242	К
Плотность	0.645×10^{-4}	0.624×10^{-5}	г/см ³
Скорость звука	0.296×10^5	0.312×10^5	м/с
Частота столкновений	0.317×10^9	0.323×10^8	1/с
Длина свободного пробега	0.126×10^{-3}	0.13×10^{-2}	см

Таблица 2

Исходные данные для расчетов обтекания сферически затупленного цилиндра

Параметр	Вариант № 1	Вариант № 2	Размерность
P_∞	0.23×10^4	0.23×10^5	Эрг/см ³ (Тор)
ρ_∞	0.178×10^{-5}	0.433×10^{-4}	г/см ³
V_∞	4.167×10^5	4.167×10^5	см/с
T_∞	450	450	К

На рис. 8 (высота $h = 22$ км) в левой стороне показаны результаты расчетов плотности конвективного потока тепла q_w по однотемпературной модели кинетики диссоциации [32], а в правой стороне рисунка приведены плотности конвективного потока тепла q_w , полученные по методике (1)–(23). На рис. 9 (высота $h = 37$ км) приведены плотности конвективных тепловых потоков в критической точке затупленного по сфере цилиндра для условий термического равновесия, а также для условий учета влияния колебательной релаксации на диссоциацию (левая часть рисунка [32]), в правой части рисунка результаты данной работы.

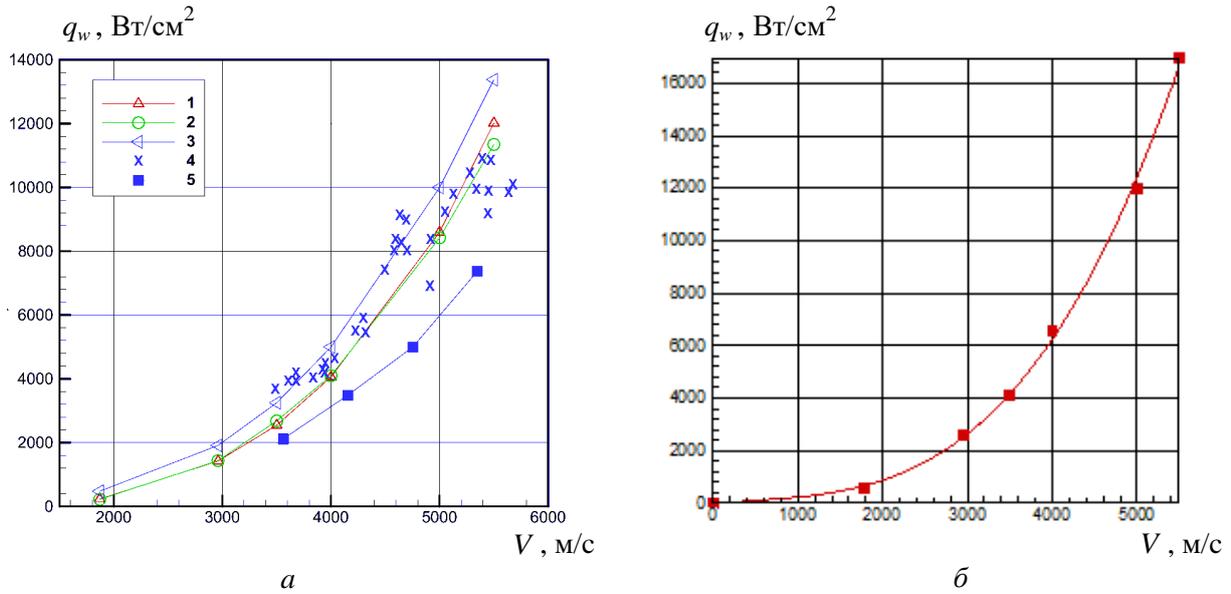


Рис. 8. Плотность конвективных тепловых потоков в критической точке затупленного по сфере цилиндра (радиус затупления $R=0.66$ см) при нулевом угле атаки для высоты полета $h=22$ км.
 а) Результаты, приведенные в работе [32]. б) Результаты, полученные в данной работе

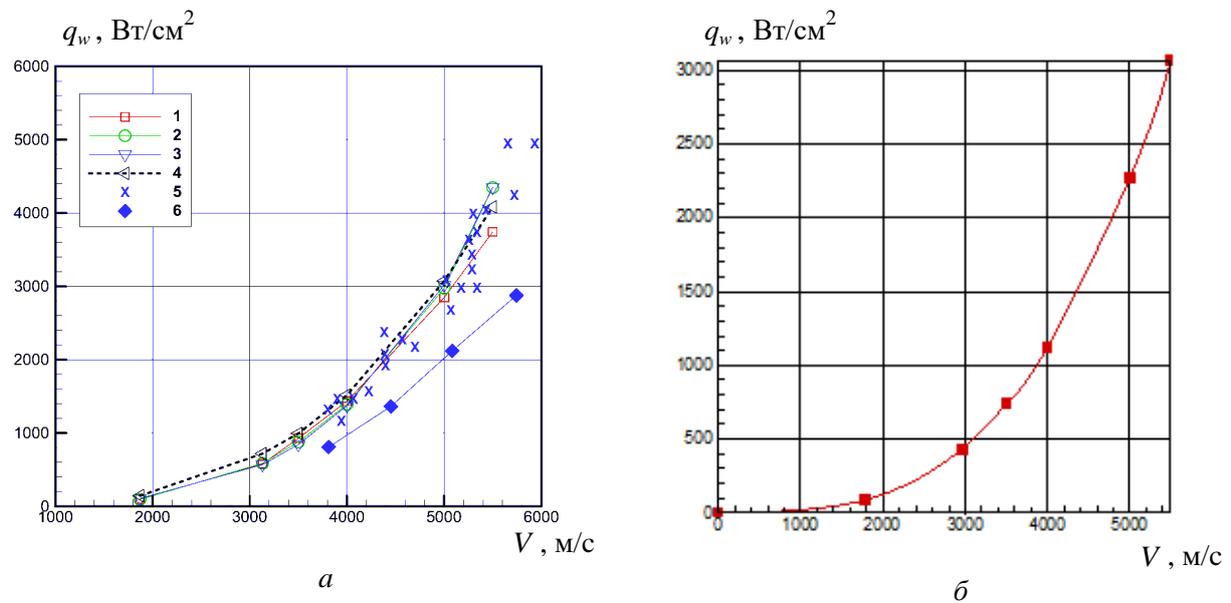


Рис. 9. Плотность конвективных тепловых потоков в критической точке затупленного по сфере цилиндра (радиус затупления $R=0.66$ см) при нулевом угле атаки для высоты полета $h=37$ км.
 а) Результаты, приведенные в работе [32]. б) Результаты, полученные в данной работе

По данным графических зависимостей (рис. 8 и 9) можно сделать следующую оценку погрешности расчета конвективного потока тепла q_w : 37 % – $h=22$ км и 22 % – $h=37$ км.

Распределения плотностей конвективных тепловых потоков q_w , вдоль обтекаемой некаталитической поверхности затупленного по сфере цилиндра показаны на рис. 10 (вариант 1). Здесь на рис. 10 кривые с точками соответствуют результатам, приведенным в работе [32], а сплошные линии получены по разработанной приближенной инженерной методике расчета конвективного теплообмена. Из данных графических зависимостей (рис.10) следует, что для радиуса затупления $R=1.27$ см (красный цвет кривой) распределение плотности конвективного теплового потока q_w , вдоль поверхности цилиндра затупленного по сфере в среднем имеет ошибку ≤ 20 %.

Более заметные расхождения в расчетах плотности конвективного теплового потока q_w , приведенных на рис. 10 (зеленый цвет кривой), наблюдаются для радиуса затупления $R = 5.08$ см.

Кроме этого были выполнены начальные, тестирующие расчеты на примере ГЛА типа Х-33 с использованием неструктурированных сеток и вычислительного кода NERAT 3D, разработанного и предоставленного авторам академиком РАН С.Т. Суржиковым. Для этого с помощью системы автоматизированного проектирования SolidWorks [41] сотрудником ФГУП «ВНИИА им. Н.Л. Духова» Сандряном Т.С. была построена геометрическая 3D модель поверхности ГЛА Х-33, которая показана на рис. 1.

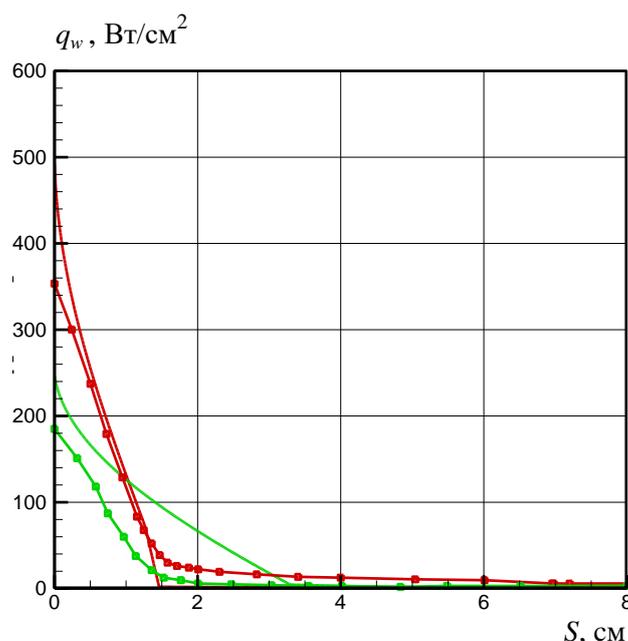


Рис. 10. Распределение плотности конвективного теплового потока вдоль поверхности цилиндра, затупленного по сфере. Радиусы затупления $R = 1.27$ см, $R = 5.08$ см (вариант № 1). Некаталитическая поверхность ($M = 9.8$)

Расчеты были выполнены на компьютере с 4 ядерным процессором Intel i7-4720HQ 2600МГц / 16384МБ, время одного расчета в параллельной (OpenMP) версии программы 4 часа 30 мин. При этом характеристики расчетной сетки были следующие: число тетраэдров 2031575, число узлов в объемной сетке 374835, число фасеток на поверхности 118284.

При 3D тестировании использовались следующие параметры потока воздуха, натекающего на ГЛА Х-33:

Давление в натекающем потоке	$P = 1120$ Па
Скорость в натекающем потоке	$V = 945$ м/с
Температура в натекающем потоке	$T = 62.1$ К
Число Маха в натекающем потоке	$M = 6$
Состав, натекающего на тело газа	Air
Высота от поверхности Земли	$H = 25$ км

В выполненных расчетах варьировался также угол натекания (от 0 до 20 градусов) набегающего потока воздуха (угол атаки).

На рис. 11–14 показаны отдельные результаты расчета с использованием приближенной математической модели процессов теплообмена для летательного аппарата типа ГЛА Х-33.

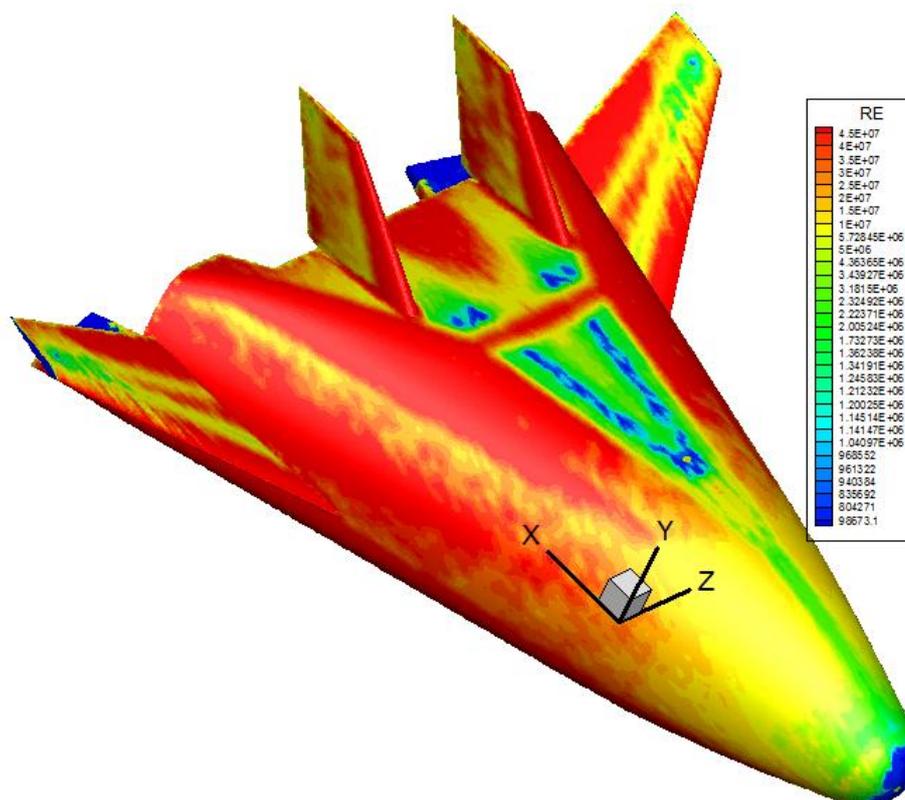


Рис. 11. Распределение числа Рейнольдса вдоль поверхности летательного аппарата типа ГЛА X-33

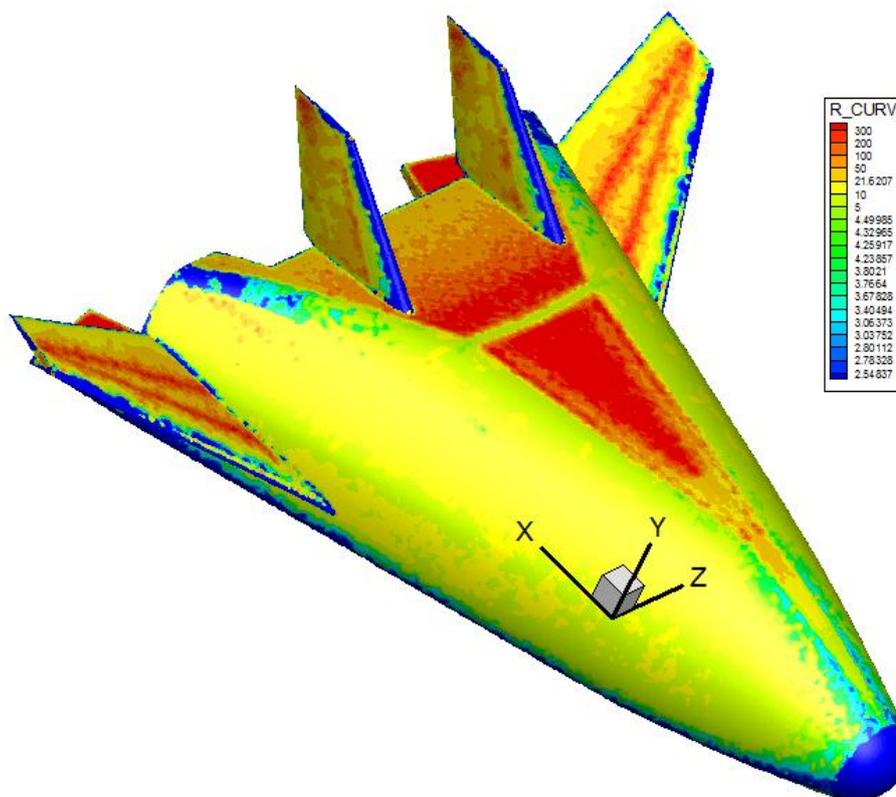


Рис. 12. Распределение среднего радиуса кривизны R_{ef} [см] поверхности летательного аппарата типа ГЛА X-33

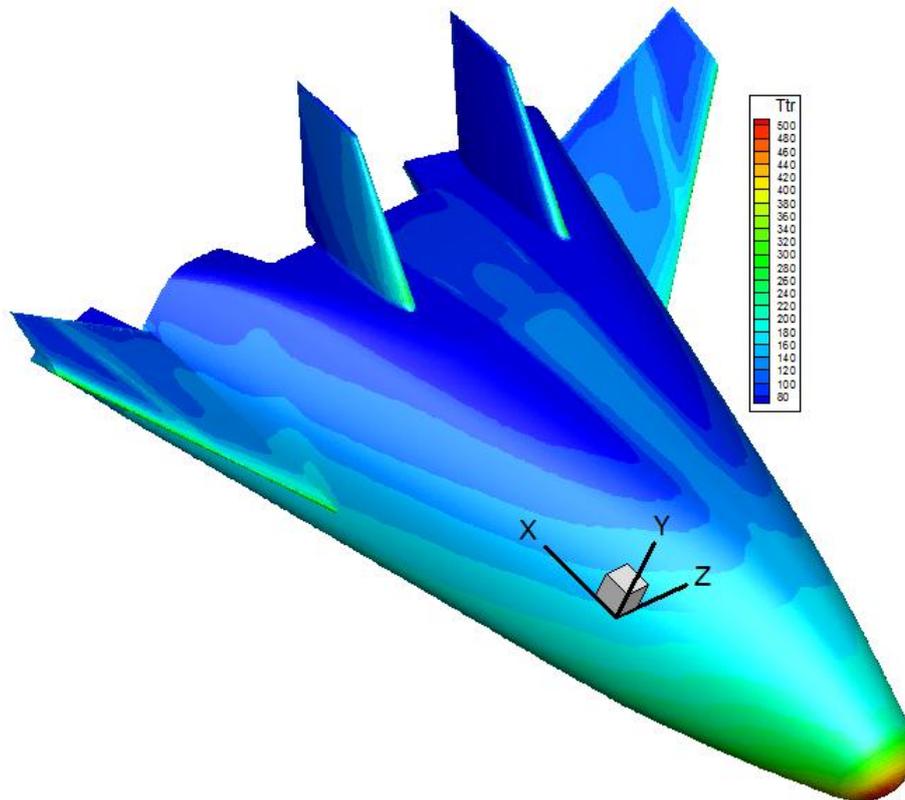


Рис. 13. Распределение температуры T [K] вдоль поверхности летательного аппарата типа ГЛА X-33

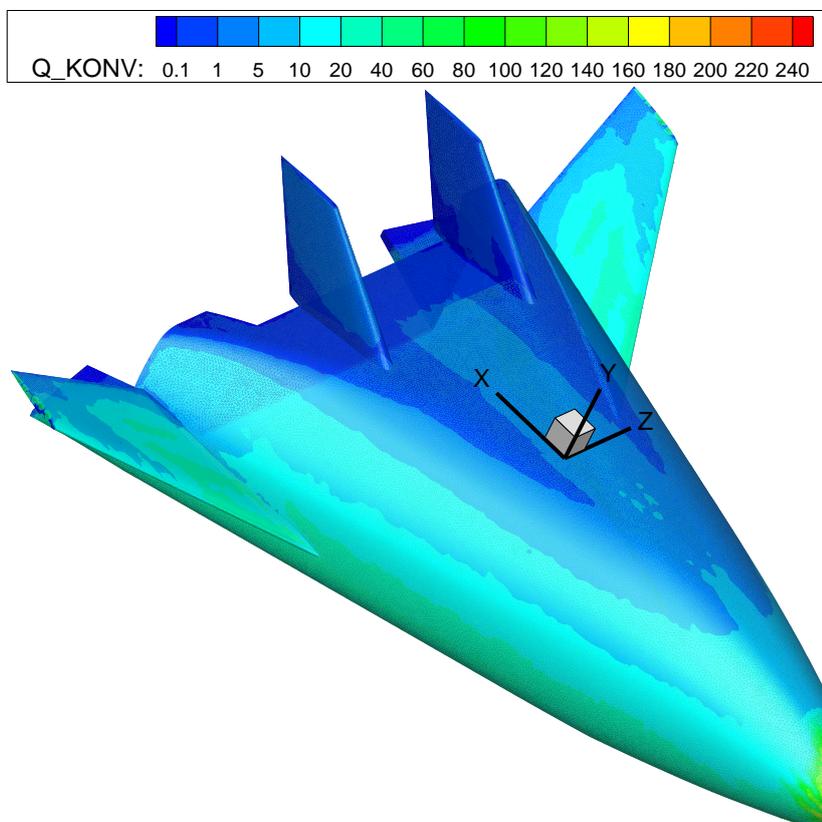


Рис. 14. Распределение конвективного теплового потока q_w [кВт/м²] вдоль поверхности летательного аппарата типа ГЛА X-33

Из распределения числа Рейнольдса (полученного с помощью понятия эффективной длины, формулы (8) и (11)) вдоль поверхности летательного аппарата (рис. 11) следует, что переход к турбулентному режиму течения наблюдается практически сразу (ламинарная область течения имеется лишь вблизи передней критической точки) за головной частью аппарата. Можно отметить также, что распределение температуры вдоль поверхности летательного аппарата типа ГЛА Х-33 (рис. 13) имеет максимум (он наблюдается и для статического давления) в точке торможения (здесь температура близка к $T \approx 500$ К). При этом основная часть газа вблизи поверхности ГЛА Х-33 имеет пониженную температуру на уровне $T \approx 150$ К.

Наибольшая интенсивности конвективного нагрева, предсказываемая расчетами (рис. 14), имеется вблизи точки торможения набегающего потока воздуха и уровень её значения составляет величину $q_w = 240$ [кВт/м²].

С использованием выше изложенной методики были рассчитаны также значения аэродинамических коэффициентов в осевом $C_{px} = 0.1055$ и поперечном $C_{py} = 0.3789$ направлениях.

6. Заключение

Разработана приближенная математическая модель процессов теплообмена в ламинарном и турбулентном пограничном слое, который создается вблизи поверхности летательного аппарата, движущегося с гиперзвуковой скоростью в атмосфере Земли. В разработанной методике для оценки конвективных тепловых потоков применяется поверхностная треугольная неструктурированная расчетная сетка. Это позволяет исследовать аэродинамический нагрев (конвективный теплообмен) ГЛА сложной геометрической формы. Разработанная вычислительная технология не вводит общую криволинейную систему координат для описания геометрии обтекаемого тела и газодинамических параметров на его поверхности, что дает возможность получать значения тепловых параметров в каждой ячейке отдельно в своей собственной, независимой системе координат. На основе, разработанной математической модели выполнены 2D варианты расчетов конвективных тепловых потоков для тел простых геометрических форм (отдельных элементов конструкции ГЛА), а также тестирующие расчеты на примере ГЛА типа Х-33 с использованием неструктурированной сетки.

Благодарности и ссылки на гранты

Авторы выражают признательность академику РАН С.Т. Суржикову за предоставленный им вычислительный код NERAT 3D, а также сотруднику ФГУП «ВНИИА им. Н.Л. Духова» Сандряну Т.С. за геометрическую модель поверхности ГЛА Х-33.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (Проект No. 16-11-10275).

Литература

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. - М.: Наука, 1969. - 824 с.
2. Авдуевский В.С. Методика расчёта теплообмена и трения при ламинарном и турбулентном режимах течения при произвольном распределении давления и переменной температуре стенки // Труды №6 - М., 1960. - 145 с.
3. Авдуевский В.С. [и др.] Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. - М.: Машиностроение, 1992. - 528 с.

4. Алексеев А.К., Журин С.В. Постпроцессор для апостериорной оценки погрешности расчёта параметров течения. // *Материалы XIV международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам*. Алушта, Крым. 2005. С. 36–37.
5. Суржиков С.Т. Перспективы многоуровневого подхода к задачам компьютерной аэрофизики // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2008. Том 7. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/435/>
6. Бауэре П. Летательные аппараты нетрадиционных схем. - М.:Мир, 1991. -320 с.
7. Башкин В.А. Треугольные крылья в гиперзвуковом потоке. М.: Машиностроение, 1984. 136 с.
8. Белошицкий А.В. [и др.] Численное моделирование теплообмена при входе в атмосферу Земли спускаемых аппаратов типа "Клипер" // *Космонавтика и ракетостроение*. 2007. Т. 46, вып. 1. С. 30–37.
9. Железнякова А.Л., Кузенов В.В., Петрусов АС., Суржиков СТ. Расчет аэротермодинамики двух типов моделей спускаемых космических аппаратов // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике* 2010. Том 9. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/144/>
10. Воинов Л.П. Тепловое проектирование орбитальных самолётов//*Сборник Авиационно-космические системы*. М.: МАИ, 1997. С. 312–319.
11. Газовая динамика космических аппаратов. Сборник статей / под ред. Таганова Г.И. М.: МИР, 1965. 278 с.
12. Краснов Н.Ф. [и др.] Основы прикладной аэрогазодинамики. М.: Высшая школа, 1991. В 2 ч.
13. Лунёв В.В. Метод среднemasовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью // *Известия АН СССР. МЖГ*. 1967. № 1. С. 127–133.
14. Лунёв В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. - М.: Машиностроение, 1975. - 328 с.
15. Лунёв В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 760 с.
16. Баскарев Б.Н., Гилевич Д.Д., Острась В.Н., Шварц Ю.Г. Расчет термического режима ступенчатой камеры сгорания // *Ученые записки ЦАГИ*, том. XVI, № 5, 1985, с.119–124
17. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. М. URSS, 2003.
18. Вулис Л.А. О взаимоналожении молекулярных и молярных эффектов в переходной области течения. — В сб. Тепло- и массоперенос, т. 3. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1963.
19. Tauber, M.E., Sutton, K. Stagnation-Point Radiative Heating Relations for Earth and Mars Entries// *J. Spacecraft*. 1991. Vol.28. No.1. Pp.40–42.
20. Zoby, E.V., Moss J.N., and Sutton K., “Approximate Convective Heating Analysis for Hypersonic Flows” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 18, № 1, 1981, pp. 64–70.
21. Hamilton, H.H., Weilmuenster, K.J., DeJanette, F.R. “Improved Approximate Method for Computing Convective Heating on Hypersonic Vehicles Using Unstructured Grids”, *AIAA* 2006-3394, January, 2006.
22. DeJanette, F.R., Hamilton H.H., Weilmuenster K.J. “New Method for Computing Convective Heating in Stagnation Region of Hypersonic Vehicles”, *AIAA* 2008, January, 2008.
23. Эккерт Э.Р. Инженерные соотношения для расчета теплообмена и трения в высокоскоростном ламинарном и турбулентном пограничном слое на поверхностях с постоянным давлением и температурой. Перевод ВИНТИ №47696/4, 1965.
24. Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.А. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. М.: Наука, 1978. 495 с.
25. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц в ячейках Рос. акад. наук, СО РАН, Ин-т выч. технологий, Новосиб. гос. Ун-т. – Новосибирск: Изд – во СО РАН, 2004. 360 с.
26. Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения. М.: ДИАЛОГ МИФИ, 1996. 288 с.

27. Журин С.В. Методика численного моделирования конвективного теплообмена на телах сложной формы с использованием метода эффективной длины // Дис. канд. физ.-мат. наук, МФТИ, Москва, 2009.
28. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 6-ое стереотип. изд-е.
29. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
30. Мартин Дж. Вход в атмосферу. Введение в теорию и практику. М.: Мир. 1969. 320 с. (John J. Martin Atmospheric Reentry. An Introduction to its Science and Engineering. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N.J.).
31. Fay, J.A., Riddell, F.R. Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air // Journal of the Aeronautical Sciences, vol.25, #2, p.73, February, 1958.
32. Суржиков С.Т. Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных Москва: ИПМех РАН, 2011. 192 с.
33. Кузенов В.В., Рыжков С.В. Математическая модель взаимодействия лазерных пучков высокой энергии импульса с плазменной мишенью, находящейся в затравочном магнитном поле // Препринт ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2010. № 942. 57 с.
34. Кузенов В.В., Рыжков С.В. Численное моделирование процесса лазерного сжатия мишени, находящейся во внешнем магнитном поле // Матем. моделирование, 29:9 (2017), 19–32 <http://mi.mathnet.ru/mm3884>
35. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика, М.-Л., 1962. 654 с.
36. Billig, Frederick S. Shock-Wave Shapes around Spherical and Cylindrical-Nosed Bodies // Journal SPACECRAFT, vol.4, No 6.
37. Borovoi, V.Ya., Skuratov, A.S., Surzhikov, S.T. Study of Convective Heating of Segmental-Conical Martian Descent Vehicle in Shock Wind Tunnel. AIAA Paper 2004-2634, Reno, NV, 2004.
38. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновесно диссоциирующим воздухом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, том 6, номер 1, с.121–129.
39. Josyula, E., Shang, J. Computation of Nonequilibrium Hypersonic Flow- fields Around Hemisphere Cylinders// J. of Thermophysics and Heat Transfer. 1993. Vol.7. No.4. Pp.668–679.
40. Rose, P.H., Stark, W.I. Stagnation point heat transfer measurements in dissociated air// Journal of Aeronautical Sciences. 1958. Vol.25. No.2. Pp. 86–97.
41. Алямовский А.А. SolidWorks Компьютерное моделирование в инженерной практике. С-П.: БХВ-Петербург, 2005. 798 с.
42. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Approximate method for calculating convective heat flux on the surface of bodies of simple geometric shapes // APhM2016 IOP Publishing IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 815 (2017) 012024 doi:10.1088/1742-6596/815/1/012024
43. Котов М.А., Рулева Л.Б., Солодовников С., Суржиков С.Т. Проведение экспериментов по обтеканию моделей в гиперзвуковой ударной аэродинамической трубе//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т. 14, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/428/>
44. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical modeling of magnetized plasma compressed by the laser beam: and plasma jets // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. № 1 (83). Pp. 12–14.
45. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Том 9. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/142/>

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2017 г.