

Bending Oscillations of the Combustion Chamber in the Presence of Supersonic Flow

Sergey V. Nesterov¹, Leonid D. Akulenko^{1,2}, Vasilij G. Baydulov^{1,2}

¹ *A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, 119526, Russia*

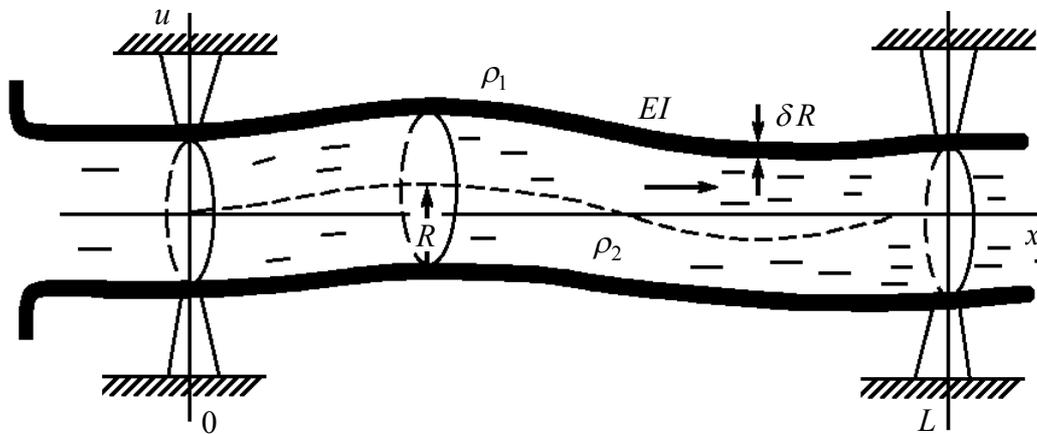
² *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia*

baydulov@gmail.com

Abstract

The frequencies and forms of natural oscillations of an extended combustion chamber are studied. Schematically, the combustion chamber is a circular tube through which a supersonic stream gas flows. The pipe can make bending vibrations, at which the volume of the medium filling the combustion chamber is practically unchanged, and acoustic disturbances are carried away by a supersonic flow through the exit nozzle. These two circumstances make it possible to assume that under bending vibrations of the combustion chamber the moving medium that fills the combustion chamber is incompressible. Therefore, it is assumed below that the medium inside the combustion chamber moves at a constant speed and is incompressible.

Keywords: transverse oscillations; combustion chamber; supersonic flow; Mach number.



Geometry of the Problem

УДК 539.3

Изгибные колебания камеры сгорания при наличии сверхзвукового потока

С.В. Нестеров¹, Л.Д. Акуленко^{1,2}, В.Г. Байдулов^{1,2}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1

² Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
Россия, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

baydulov@gmail.com

Аннотация

Исследуются частоты и формы собственных колебаний протяженной камеры сгорания. Схематически камера сгорания представляет собой круглую трубу, через которую протекает сверхзвуковой поток газа. Труба может совершать изгибные колебания, при которых практически не изменяется объем среды, заполняющей камеру сгорания, и акустические возмущения уносятся сверхзвуковым потоком через выходное сопло. Эти два обстоятельства позволяют считать, что при изгибных колебаниях камеры сгорания движущаяся среда, заполняющая камеру сгорания, является несжимаемой. Поэтому ниже предполагается, что среда внутри камеры сгорания движется с постоянной скоростью U и является несжимаемой.

Ключевые слова: поперечные колебания, камера сгорания, сверхзвуковой поток, число Маха.

1. Постановка задачи.

Исследуются малые изгибные колебания камеры сгорания длины L , содержащей идеальную жидкость, движущуюся с постоянной скоростью U (рис. 1).

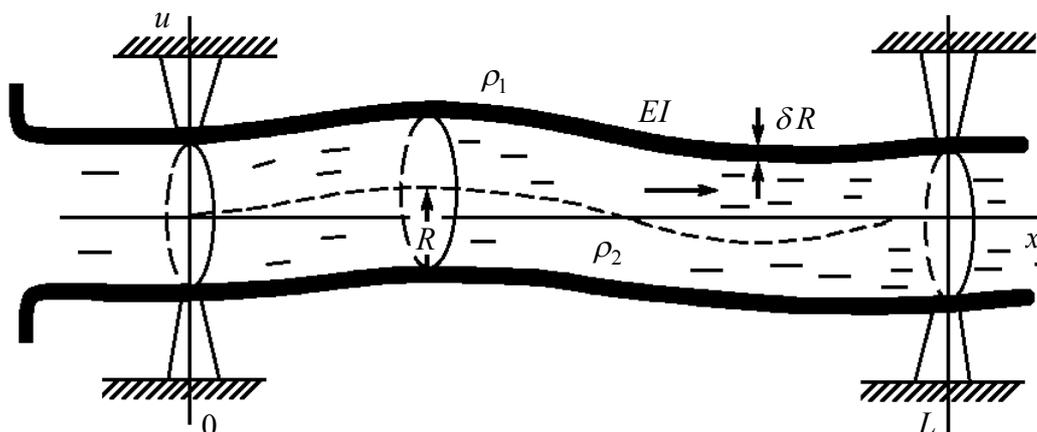


Рис. 1. Геометрия задачи

Традиционная модель таких колебаний учитывает центробежные и кориолисовы силы, вызванные движением сред и изгибом трубы, описывается основным уравнением [1]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho_2 U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\rho_2 U \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где w – изгиб срединной линии трубы; E – модуль Юнга материала трубы; I – момент инерции поперечного сечения камеры относительно диаметра камеры; ρ_1 и ρ_2 – погонные плотности материала трубы и среды, заполняющей камеру, соответственно; U – скорость среды, протекающей через камеру.

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$w(z, t) = Wu(x) \exp(i\Omega t),$$

где u – комплексная безразмерная амплитуда поперечного перемещения камеры сгорания ($x = z/L$); W – некоторое (произвольное) характерное поперечное перемещение камеры сгорания; Ω – частота собственных колебаний камеры сгорания. После подстановки функции $w(z, t)$ в уравнение (1) получим для неизвестной функции u следующее уравнение в безразмерных переменных

$$u^{(4)} + \alpha^2 Nu'' + 2i\alpha N\omega u' - \omega^2 u = 0, \quad (2)$$

где $\omega = \Omega L/U$ – безразмерная собственная частота; $V_0 = L^{-1} [EI/(\rho_1 + \rho_2)]^{1/2}$ – характерная скорость распространения упругих колебаний в стенке камеры; $\alpha = U/V_0$ – скоростной параметр; $N = \rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$ – инерционный параметр; i – мнимая единица.

Рассматривается случай жесткого защемления концов камеры сгорания

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \quad (3)$$

Итак, получена краевая задача (2–3), которая состоит в том, чтобы найти такие значения параметра ω , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (3), удовлетворяющие краевым условиям (3). Задача (2–3) отличается от традиционной задачи Штурма–Лиувилля тем, что искомым параметр ω (собственное число) входит нелинейным образом в уравнение (2) и один из коэффициентов этого уравнения содержит мнимую единицу.

В работе [2] доказано, что все собственные частоты краевой задачи (2–3) действительны, также приведены два алгоритма вычисления собственной частоты ω для широкого диапазона значений скоростного параметра α и инерционного параметра $0.1 \leq N \leq 1$.

В настоящей статье для нахождения собственных частот использовался третий алгоритм ускоренной сходимости специально адаптированных для решения краевой задачи (2–3). Поскольку сам алгоритм ускоренной сходимости и его реализация в виде программ в системе Maple занимают большой объем, и представляют самостоятельный интерес, то предполагается отдельная публикация.

Для оценки собственных частот изгибных колебаний круглой камеры сгорания примем, что температура в камере сгорания $T = 2000$ К, объемная плотность $\rho_2 = 0.0523$ г/см³, объемная плотность материала стенки камеры $\tilde{\rho}_1 = 1.8$ г/см³. Внутренний радиус камеры сгорания $R_1 = 12.6$ см, внешний – $R_2 = 13.6$ см. Согласно эти данным находим погонные плотности ρ_1 и ρ_2 и определяем инерционный параметр

$$N = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 0.15$$

Примем, что модуль Юнга может иметь три значения [3]:

$$E_1 = 4.2 \times 10^{11} \text{ дин/см}^2, \quad E_2 = 3.8 \times 10^{12} \text{ дин/см}^2, \quad E_3 = 5 \times 10^{12} \text{ дин/см}^2$$

Расчет по приведенным выше формулам дает для соответствующих характерных скоростей следующие величины:

$$V_0 = 4.13 \times 10^2 \text{ м/с}, V_0 = 1.242 \times 10^3 \text{ м/с}, V_0 = 1.425 \times 10^3 \text{ м/с}$$

Примем, что скорость звука в среде, заполняющей камеру сгорания равна $c = 897 \text{ м/с}$, тогда при числах Маха $M = U/c = 1.5; 2.0; 3.0$ скорость потока составляет

$$U = 1.346 \times 10^3; 1.795 \times 10^3; 2.692 \times 10^3 \text{ м/с}$$

Соответственно значения скоростного параметра равны

$$\text{при } V_0 = 4.13 \times 10^2 \text{ м/с} \quad \alpha_1 = 3.260, \quad \alpha_2 = 4.346, \quad \alpha_3 = 6.518;$$

$$\text{при } V_0 = 1.1242 \times 10^3 \text{ м/с} \quad \alpha_1 = 1.084, \quad \alpha_2 = 1.445, \quad \alpha_3 = 1.890;$$

$$\text{при } V_0 = 1.523 \times 10^3 \text{ м/с} \quad \alpha_1 = 0.885, \quad \alpha_2 = 1.178, \quad \alpha_3 = 1.768$$

В таблице 1 приведены безразмерные частоты первой и второй форм изгибных колебаний камеры сгорания для всех приведенных выше значений скоростного параметра α

Таблица 1

α	ω_1	ω_2
0.884	22.3387	61.6302
1.084	22.3207	61.6087
1.178	22.3112	61.5971
1.445	22.2798	61.5589
1.768	22.2333	61.5022
1.890	22.2132	61.4778
3.260	21.8939	61.0912
4.346	21.5145	60.6361
6.518	20.3956	59.3214

Приведем окончательные результаты вычисления собственных частот изгибных колебаний при числах Маха $M = 1.5; 2.0; 3.0$ в таблицах 2, 3. Размерные частоты изгибных колебаний вычисляются, исходя из формулы $\Omega = \omega V_0 / L$, где ω приведена в табл. 1, V_0 – характерная скорость распространения изгибных колебаний, L – длина камеры сгорания (принята равной 1 м).

Таблица 2

Первая частота изгибных колебаний камеры

$V_0 = 4.13 \times 10^2 \text{ м/с}$	$\alpha_1 = 3.260$	$\Omega_1 = 9042 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 1439 \text{ Гц}$
	$\alpha_2 = 4.346$	$\Omega_1 = 8885 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 1414 \text{ Гц}$
	$\alpha_3 = 6.518$	$\Omega_1 = 8423 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 1340 \text{ Гц}$
$V_0 = 1.1242 \times 10^3 \text{ м/с}$	$\alpha_1 = 1.084$	$\Omega_1 = 27722 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 4412 \text{ Гц}$
	$\alpha_2 = 1.445$	$\Omega_1 = 27672 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 4404 \text{ Гц}$
	$\alpha_3 = 1.890$	$\Omega_1 = 27589 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 4391 \text{ Гц}$
$V_0 = 1.523 \times 10^3 \text{ м/с}$	$\alpha_1 = 0.884$	$\Omega_1 = 34022 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 5415 \text{ Гц}$
	$\alpha_2 = 1.178$	$\Omega_1 = 33978 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 5408 \text{ Гц}$
	$\alpha_3 = 1.768$	$\Omega_1 = 33861 \text{ с}^{-1}$	$f_1 = 5389 \text{ Гц}$

Таблица 3

Вторая частота изгибных колебаний камеры

$V_0 = 4.13 \times 10^2$ м/с	$\alpha_1 = 3.260$	$\Omega_2 = 25231$ с ⁻¹	$f_2 = 4016$ Гц
	$\alpha_2 = 4.346$	$\Omega_2 = 25043$ с ⁻¹	$f_2 = 3986$ Гц
	$\alpha_3 = 6.518$	$\Omega_2 = 24500$ с ⁻¹	$f_2 = 3899$ Гц
$V_0 = 1.1242 \times 10^3$ м/с	$\alpha_1 = 1.084$	$\Omega_2 = 76518$ с ⁻¹	$f_2 = 12178$ Гц
	$\alpha_2 = 1.445$	$\Omega_2 = 76456$ с ⁻¹	$f_2 = 12168$ Гц
	$\alpha_3 = 1.890$	$\Omega_2 = 76355$ с ⁻¹	$f_2 = 12152$ Гц
$V_0 = 1.523 \times 10^3$ м/с	$\alpha_1 = 0.884$	$\Omega_2 = 93863$ с ⁻¹	$f_2 = 14939$ Гц
	$\alpha_2 = 1.178$	$\Omega_2 = 93812$ с ⁻¹	$f_2 = 14930$ Гц
	$\alpha_3 = 1.768$	$\Omega_2 = 93668$ с ⁻¹	$f_2 = 14907$ Гц

Не приводя сходную таблицу для собственных частот третьей моды Ω_3 , f_3 , отметим, что третья собственная частота для всех V_0 может быть получена по следующей приближенной формуле $f_3 \approx 2f_2$.

Из таблиц 2 и 3 следует, что первая и вторая собственные частоты изгибных колебаний для принятых выше параметров камеры сгорания находятся в области звуковых частот, воспринимаемых ухом человека. Третья собственная частота для $V_0 = 4.13 \times 10^2$ м/с также находится в области звуковых частот. Для $V_0 = 1.242 \times 10^3$ м/с и $V_0 = 1.523 \times 10^3$ м/с частота f_3 в области ультразвука. Собственные частоты четвертой и более высоких мод также лежат в области ультразвука.

Собственные частоты высшего порядка могут быть вычислены с помощью имеющейся программы.

Приведенные результаты показывают, что:

1. При заданных значениях характерной скорости V_0 и инерционного параметра $N = 0.15$ все собственные частоты убывают с ростом числа Маха, т.е. жесткостные свойства системы уменьшаются.
2. Если характерная скорость распространения упругих волн возрастает, что происходит при увеличении модуля упругости Юнга материала камеры сгорания, то влияние скорости потока (рост числа Маха) на величины собственных частот уменьшается.
3. Если инерционный параметр изменяется в пределах $0.1 \leq N \leq 1$, то все собственные частоты при фиксированных V_0 и M увеличиваются.
4. Из формулы $\Omega = \omega V_0 / L$ следует, что все собственные частоты уменьшаются с ростом длины камеры.

Здесь не приведены результаты по вычислению для неподвижного наблюдателя собственных форм колебаний и их эволюции во времени, т.к. их видит неподвижный наблюдатель, поскольку картина такой эволюции собственных форм достаточно подробно описана ранее [2].

Благодарности и ссылки на гранты

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-11-10343).

Литература

1. Hausner G.W. Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. No. 2. Pp. 205–208.

2. Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В. Основные свойства собственных колебаний участка трубопровода // Изв. РАН. МТТ. 2013. №4. С. 119–134.
3. Рулев Д.А. Исследование характеристик прохождения ультразвука через углерод–углеродные композиционные материалы // Национально-исследовательский Томский политехнический университет. VI Международная студенческая электронная научная конференция «Студенческий научный форум», 15 Февраля – 31 марта 2014. <https://www.scienceforum.ru/2014/343/1618>

Статья поступила в редакцию 4 ноября 2017 г.