

УДК 532.5

ДИНАМИКА ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАНИЦЫ АКТИВНОЙ СРЕДЫ.

Микулин А.Ю., Куратов С.Е., Кудинов И.В.

ФГУП ВНИИА им. Н.Л. Духова, Москва

botsman1990@mail.ru

Аннотация

Рассмотрено развитие неустойчивости на границе раздела активной и пассивной сред. Активная среда - вещество, в котором происходят реакции с образованием высокоэнергичных частиц. Для анализа неустойчивости использовано гидродинамическое приближение. С помощью метода Чепмена – Энскога определены границы применимости уравнений гидродинамики. На основании теории потенциальных течений найдены характерные времена роста малых возмущений границы раздела

DYNAMICS OF ACTIVE MEDIA INTERFACE PERTURBATIONS.

Mikulin A.Yu., Kuratov S.E., Kudinov I.V.

FSUE VNIIA, Moscow

The evolution of an instability at the interface of active and passive media is considered. The active medium is a substance in which a reaction is accompanied by the generation of high-energy particles. These particles decelerated in the both media which produce a force operating in the region near the interface. The validity conditions of hydrodynamic approach are determined by means of the Chapman – Enskog method. A growth increment of small perturbations of the interface is found using the potential flows theory.

1. Введение

Суть рассматриваемой в данной работе неустойчивости заключается в развитии малых возмущений на границе раздела активной и пассивной сред. Активная среда - вещество, в котором происходят реакции с образованием высокоэнергичных частиц. Данные частицы тормозятся в обеих средах, вызывая появление силы, действующей в области вблизи границы раздела. Впервые данный процесс был рассмотрен в работе [1], где был дан общий вид зависимости вышеупомянутой силы от возмущения границы раздела. В настоящей работе для двух важных предельных случаев были предложены новые зависимости силы от возмущения границы раздела, а также, с помощью метода Чепмена - Энскога определены условия, при выполнении которых гидродинамическое описание справедливо.

Первый предельный случай соответствует ситуации, когда средняя длина пробега продукта реакции много больше длины волны возмущения границы раздела. Тогда предполагается, что поле ускорения практически не зависит от возмущения границы и данный случай сводится к классической неустойчивости Рэлея–Тейлора (РТН) [2]. Обзор наиболее значимых теоретических работ по данной неустойчивости был сделан Кюлем [3], где, в частности, обсуждается вопрос о развитии РТН в средах с изменяющимся полем гравитации. Показано [3], что даже сильные изменения гравитации вдоль струи мало сказываются на динамике пузыря.

Второй предельный случай соответствует ситуации, когда средняя длина пробега продукта реакции много меньше длины волны возмущения границы раздела. За исключением работы [1], претендующей на общность, данный предельный случай ранее не рассматривался.

С использованием программных комплексов GEANT4 и MATLAB были проведены расчёты поля ускорения вблизи границы раздела двух сред. Показано их лучшее соответст-

вие предложенным в настоящей работе зависимостям, чем зависимости, приведённой в работе [1].

Как в [1], так и в настоящей работе, для анализа эволюции системы был применён гидродинамический подход. С использованием теории потенциальных течений в случае малой (по сравнению с длиной волны возмущения) длине пробега продуктов реакции в пассивной среде была найдена неустойчивость границы раздела и определено характерное время её развития. Существенной особенностью данной неустойчивости является генерация высших гармоник возмущения.

Оценена возможность проявления данной неустойчивости в экспериментах по ИТС. В настоящее время, наибольшие успехи в данном направлении достигнуты на установке NIF [4], где впервые получено превышение полученной в результате синтеза энергии над энергией, переданной мишени. В работе [4], тем не менее, показано несовпадение энерговыделения в экспериментах и в радиационно-гидродинамических расчётах. В работе [5,6] показано, что данное несоответствие может быть обусловлено перемешиванием, вызванными различными гидродинамическими неустойчивостями на границе: неустойчивостями Рэлея-Тейлора, Рихтмайера-Мешкова, Кельвина-Гельмгольца. Рост возмущений, обусловленных подобными неустойчивостями, приводит к тому, что холодное плотное топливо проникает в область горячей точки и эффективно снижает её температуру посредством электронной теплопроводности, что в итоге не позволяет термоядерной реакции развиваться в требуемой степени.

С помощью данных, приведённых в работе [4], оценено, что за время горения термоядерной мишени, перенос импульса α - частицами, может привести к дополнительному развитию возмущений границы "горячей точки" с длиной волны $\lambda < 5$ мкм.

2. Обоснование гидродинамического приближения.

Из кинетической теории известно [7], что равновесному состоянию, при котором интеграл столкновений Больцмана обращается в нуль, отвечает максвелловская функция распределения. При взаимодействии частиц пассивной среды с быстрыми продуктами реакций их функция распределения перестаёт быть максвелловской. С помощью метода Чепмена – Энскога покажем возможность использования гидродинамического приближения.

Рассмотрим самый «неравновесный» вариант данной задачи: система состоит из лёгкой пассивной среды и тяжёлой активной среды, в которой происходит образование быстрых и тяжёлых продуктов реакции.

Уравнение Больцмана для функции распределения лёгких частиц выглядит следующим образом

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} + \vec{v}_L \frac{\partial f_L}{\partial \vec{r}} + \vec{E}_L \frac{\partial f_L}{\partial \vec{p}} = I_{\text{coll}}(f_L, f_L) + I_{\text{coll}}(f_L, f_A) + I_{\text{coll}}(f_L, f_H) \quad (1)$$

Здесь f_L - функция распределения лёгких частиц; f_H - функция распределения тяжёлых частиц; f_A - функция распределения продуктов реакции,

$I_{\text{coll}}(f_a, f_b) = \int \int d\vec{p}_a d\sigma_{ab} v_{ab} \{ f'_a f'_b - f_a f_b \}$ - интеграл столкновений Больцмана.

Исключим $I_{\text{coll}}(f_L, f_H)$, ибо на данном этапе мы пренебрегаем диффузией и считаем, что внутри пассивной среды нет частиц активной среды. Уравнение (1) тогда примет следующий вид:

$$\frac{\partial f_L}{\partial t} + \vec{v}_L \frac{\partial f_L}{\partial \vec{r}} + \vec{E}_L \frac{\partial f_L}{\partial \vec{p}} = [I_{\text{coll}}(f_L, f_L) + I_{\text{coll}}(f_L, f_A)].$$

Применим метод Чепмена - Энскога [8].

Для распределений, слабо отличающихся от равновесных, используем представление функции распределений в виде ряда $f_L = f_L^{[0]} + f_L^{[1]} + f_L^{[2]} + \dots$, где $f_L^{[0]}$ - максвелловская функция распределения. При этом считаем, что $f_L^{[0]} \gg f_L^{[1]} \gg f_L^{[2]} \gg \dots$

Первую поправку к функции распределения лёгких частиц запишем в виде $f^{[1]} = f^{[0]}\varphi$, $\varphi \ll 1$. В соответствии с [2], получаем:

$$\begin{aligned} f_L^{[0]} \left\{ \vec{V}_L \frac{\partial \ln T_L}{\partial \vec{r}} \left[\frac{m_L V_L^2}{2kT_L} - \frac{5}{2} \right] + \frac{m_L}{kT_L} \left(V_{L,i} V_{L,k} - \frac{1}{3} \delta_{ik} V_L^2 \right) \frac{\partial v_{0,L,i}}{\partial r_k} + \frac{1}{kT_L} (\vec{V}_L, \vec{F}) \right\} = \\ = \int d\vec{p}_{L,1} |\vec{V}_L - \vec{V}_{L,1}| d\sigma_{LL} f_L^{[0]}(\vec{V}_L) f_L^{[0]}(\vec{V}_{L,1}) \left[\varphi(\vec{V}_L') + \varphi(\vec{V}_{L,1}') - \varphi(\vec{V}_L) - \varphi(\vec{V}_{L,1}) \right] + \\ + I_{\text{coll}}(f_L^{[0]}, f_A) \end{aligned} \quad (2)$$

При выводе левой части (2) учтено появление в уравнениях гидродинамики силы $\vec{F} = \frac{1}{n_L} \int I_{st}(f_L^{[0]}, f_A) m_L (\vec{v}_L - \vec{v}_{0,L}) d\vec{p}_L$

Представим φ в виде суммы φ_1 , φ_2 и φ_3 . Функции φ_2 и φ_3 представляют собой известные решения - поправки к функции распределения лёгких частиц, обусловленные неоднородностью их температуры и средней массовой скорости. При этом сумма решений φ_2 и φ_3 удовлетворяет уравнению (2) без $I_{\text{coll}}(f_L^{[0]}, f_A)$ и $f_L^{[0]}/kT_L(\vec{V}_L, \vec{F})$. Опираясь на это, выпишем уравнение для определения φ_1 :

$$\begin{aligned} \int d\vec{p}_{L,1} |\vec{V}_L - \vec{V}_{L,1}| d\sigma_{LL} f_L^{[0]}(\vec{V}_L) f_L^{[0]}(\vec{V}_{L,1}) \left[\varphi_1(\vec{V}_L') + \varphi_1(\vec{V}_{L,1}') - \varphi_1(\vec{V}_L) - \varphi_1(\vec{V}_{L,1}) \right] + \\ + I_{\text{coll}}(f_L^{[0]}, f_A) = \frac{f_L^{[0]}}{kT_L}(\vec{V}_L, \vec{F}) \end{aligned} \quad (3)$$

Найдём вид интеграла столкновений $I_{\text{coll}}(f_L^{[0]}, f_A)$.

Его асимптотический вид может быть определён из общих соображений. Если скорость влетающего продукта реакции много больше средней массовой и тепловой скоростей частиц пассивной среды, то в интеграле столкновений можно оставить только член, ответственный за уход частиц из элемента фазового пространства. Амплитуда интеграла столкновений, в свою очередь, должна быть прямо пропорциональна плотности потока продуктов реакции, сечению взаимодействия между продуктом реакции и частицей активной среды и концентрации частиц пассивной среды в данном элементе фазового пространства. Составляя комбинацию нужной размерности, приходим к соотношению:

$$I_{\text{coll,tot}} \simeq -f_L^{[0]} \sigma_{LA} Q \quad (4)$$

Более строгий вывод приведён в Приложении 1. Соответствующее выражение для силы:

$$F \simeq 2\sqrt{2} Q \sigma_{LA} m_L v_A \quad (5)$$

Теперь оценим часть с φ_1 . Из уравнения (3) имеем:

$$\begin{aligned} \int d\vec{p}_{L,1} |\vec{V}_L - \vec{V}_{L,1}| d\sigma_{LL} f_L^{[0]}(\vec{V}_L) f_L^{[0]}(\vec{V}_{L,1}) \left[\varphi_1(\vec{V}_L') + \varphi_1(\vec{V}_{L,1}') - \varphi_1(\vec{V}_L) - \varphi_1(\vec{V}_{L,1}) \right] \leq \\ \leq f_L^{[0]} \sigma_{LL} \varphi_{1,\text{max}} \sqrt{\frac{kT_L}{m_L}} \int d\vec{p}_{L,1} f_L^{[0]}(\vec{p}_{L,1}) \sim f_L^{[0]} \sigma_{LL} \varphi_{1,\text{max}} n_L \sqrt{\frac{kT_L}{m_L}} \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, сопоставляя (4), (5) и (6) имеем:

$$|\varphi_{1,\max}| \sim \frac{Q}{n_L} \frac{\sigma_{LA}}{\sigma_{LL}} \left(\sqrt{\frac{m_L}{kT_L}} + \frac{m_L v_A}{kT_L} \right) \quad (7)$$

Очевидно, что выполнения условия $\varphi_{1,\max} \ll 1$, обеспечивающего применимость гидродинамического приближения можно добиться малостью отношения Q/n_L . Т.е. гидродинамическое приближение справедливо при небольших скоростях реакций в активной среде.

3. Постановка задачи в гидродинамическом приближении.

Рассмотрим область (см. рис.1), содержащую в себе часть пассивной среды, активной среды, и границы их раздела. Мысленно проведём три сечения в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка. Сечение 1 расположим в глубине активной среды, сечение 2 - в активной среде на расстоянии длины пробега продукта реакции, сечение 3 - так же, но в пассивной среде.

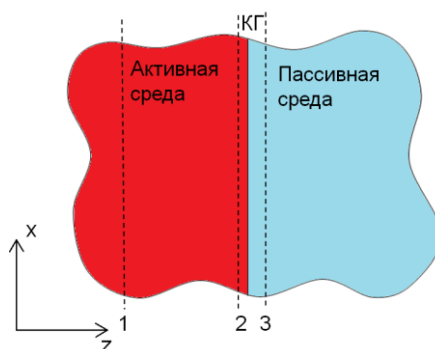


Рис. 1. Область вблизи границы раздела активной и пассивной сред.

Очевидно, что потоки продуктов реакции, проходящие через сечение 1 слева направо и справа налево одинаковы. Поэтому результирующая сила, действующая на элементы среды в данном сечении равна нулю. Та же ситуация наблюдается и правее сечения 3, куда продукты реакции не долетают. Между сечениями 2 и 3, потоки слева направо и справа налево не скомпенсированы, в связи с чем данная область находится в поле внешней силы. Дальнейшая структура работы состоит из двух основных частей:

1. Аналитическая аппроксимация данного поля.
2. Определение характера развития возмущений границы раздела активной и пассивной сред.

4. Аппроксимация поля ускорения.

В работе [1] возмущение объёмной силы, обусловленное возмущением контактной границы представлялось в виде

$$F_z^{(1,2)} = \mp \frac{q_1 m v l_1}{\pi} \frac{\xi}{l_{1,2}^2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \cos(kz \tan \vartheta) \cdot \exp\left(-\frac{|z|}{l_{1,2} \cos \vartheta}\right), \quad (8)$$

где q_1 - объёмная мощность источника частиц в активной среде; m и v - масса и скорость рождающихся частиц; $l_{1,2}$ - пробеги частиц в активной и пассивной среде соответственно; ξ - возмущение контактной границы.

Мы будем рассматривать два предельных случая, соответствующих малым ($L/\lambda \ll 1$) и большим ($L/\lambda \gg 1$) длинам свободного пробега, по отношению к длине волны возмущения границы раздела сред.

Нами показано (см. Приложение 2), что при выполнении условия $(L/\lambda \ll 1)$ распределение силы, действующей на элементы границы, выглядит следующим образом:

$$F(x, t)|_{y=\xi} = F_0 \left(1 - \beta_1 L^2 \left(\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3} \right), \quad (9)$$

где F_0 - сила при отсутствии возмущений; β_1 - коэффициент, зависящий от типа продукта реакции; ξ - возмущение контактной границы; $L = l_{nacc} = l_{акт}$.

Комбинация $\left(\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3}$ представляет собой квадрат кривизны границы.

Далее, из соображений удобства, будем использовать понятие радиуса кривизны:

$$\left(\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \equiv \frac{1}{R(x, t)} \quad (10)$$

На рис.2 приведены результаты расчётов силы, действующей на элементы границы и её сравнение с формой границы и квадратом кривизны. Масштабы выбраны из соображений наглядности.

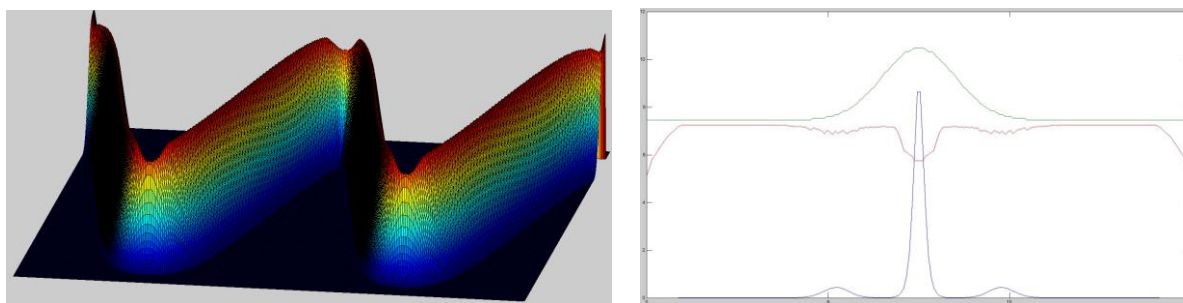


Рис. 2. Граница раздела (зел.), квадрат её кривизны (син.) и ускорение на границе (красн.).

В случаях, соответствующих большим отношениям $dx_{ногл} dy_{ногл}$, при анализе эволюции системы, более разумным, по-видимому, является переход от рассмотрения поля силы вблизи границы раздела к давлению (как это обычно делается при учёте эффектов поверхностного натяжения):

$$\Pi(x, t)|_{y=\xi(x, t)} \approx \int_{-L}^L \rho(\xi - x) g(\xi - x, t) dx \quad (11)$$

На основании численных расчётов нами показано, что для случая $l_{акт} \gg l_{nacc} = L$, $\rho_{nacc} \gg \rho_{акт}$, давление на поверхности пассивной среды (в данном случае под поверхностью подразумевается геометрическое место точек, расположенное внутри пассивной среды на расстоянии l_{nacc} от границы раздела) также можно аппроксимировать зависимостью

$$\Pi(x, t)|_{y=\xi} = \Pi_0 \left(1 - \beta_2 \frac{L^2}{R^2} \right) \quad (12)$$

При этом полагалось, что изотропные по энергии источники частиц располагаются только на границе раздела. Результаты приведены на рис. 3

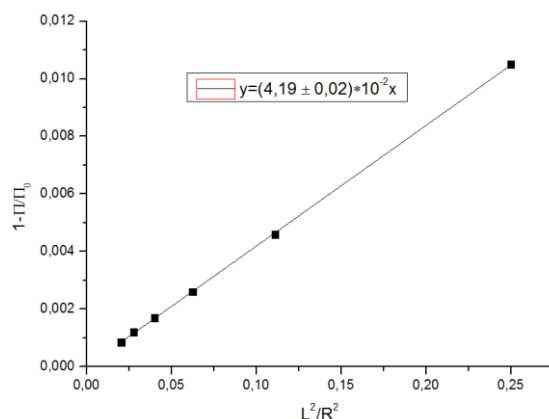


Рис. 3. Определение коэффициента β_2 уравнения (12)

Точное определение коэффициента β_2 требует проведения расчётов с учётом реальных тормозных способностей сред. Приведённое выше значение y_0 лишь позволяет оценить его порядок.

В противоположном предельном случае $\left(\frac{L}{\lambda} \gg 1\right)$, как показывают расчёты в MATLAB, поле ускорения слабо меняется при возмущении границы раздела.

Ниже, на рис. 4 и рис. 5 приведены сравнения расчётов силового поля.

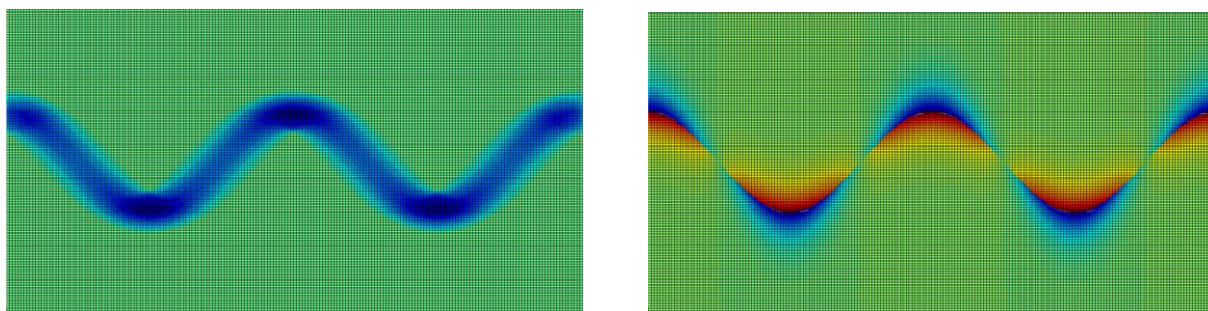


Рис.4. Распределения F_z , полученные прямым расчётом в MATLAB (слева) и по данным статьи [1] (справа). Зелёный фон соответствует "нулевому уровню". Отношение $L/\lambda = 1/15$.

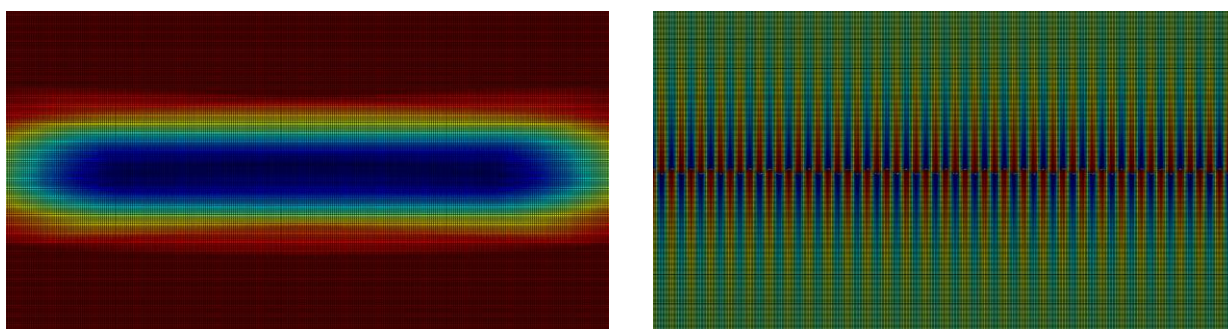


Рис.5. Распределения F_z , полученные прямым расчётом в MATLAB (слева) и по данным статьи [1] (справа). Зелёный фон соответствует "нулевому уровню". Отношение $L/\lambda = 6$.

5. Эволюция возмущений границы раздела.

Развитие возмущений границы раздела активной и пассивной сред будем рассматривать в предположении о потенциальности возникающих гидродинамических течений. Дан-

ное предположение позволяет использовать математический аппарат Фурье-разложения для потенциала скоростей, зарекомендовавший себя как мощный инструмент исследования как линейных, так и ранних нелинейных стадий развития гидродинамических неустойчивостей [10].

Проведённый в предыдущей главе анализ полей ускорения свидетельствует о том, что для случая $(L/\lambda \gg 1)$, в соответствие с классическими работами [2], [3], граница неустойчива при выполнении условия $\rho_{nacc} g_{nacc} < \rho_{акт} g_{акт}$. Соответствующий инкремент роста малых возмущений:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{k(\rho_{nacc} g_{nacc} - \rho_{акт} g_{акт})}{\rho_{nacc} \coth(kl_{nacc}) + \rho_{акт} \coth(kl_{акт})}} \quad (13)$$

Определяя инкремент таким образом, мы фактически заменяем верхнюю и нижнюю границы центральной части системы (шириной $\sim \varphi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N_{max}} A_n(t) \cos(knx) \exp(kny)$ на жёсткие стенки.

Для анализа обратного предельного случая несколько упростим постановку задачи, а именно: рассмотрим случай $\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \eta_n(t) \cos(knx)$. Тогда можно считать, что система состоит лишь из одной жидкости бесконечной глубины, давление на границе которой задано в виде (10). Т.к. интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в отсутствии поля внешних сил записывается в виде $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)$; где $f(t)$ – произвольная функция времени; постоянное "фоновое" давление P_0 для удобства может быть отброшено.

Далее, следуем подходу, ранее развитому в [10] и представляем потенциал скорости пассивной среды и её границу в виде тригонометрических рядов Фурье (полагая начальное возмущение границы чётной функцией координаты).

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{N_{max}} A_n(t) \cos(knx) \exp(kny) \quad (14)$$

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \eta_n(t) \cos(knx) \quad (15)$$

Динамическое и кинематическое граничные условия:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right|_{y=\eta(x,t)} = 0 \\ \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{y=\eta(x,t)} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=\eta(x,t)} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Рассмотрим далее "слабонелинейную" задачу:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \right|_{y=\eta(x,t)} = 0 \\ \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=\eta(x,t)} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

При этом полагаем $\left. \frac{p}{\rho} \right|_{y=\eta(x,t)} = -ck^4 \left(\sum_{n=1}^{N_{\max}} n^2 \eta_n(t) \cos(knx) \right)^2$

Раскрывая квадрат, получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{p}{\rho} \right|_{y=\eta(x,t)} = & -ck^4 \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{\max}} n^4 \eta_n^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{\max}} n^4 \eta_n^2(t) \cos(2nkx) + \dots \right. \\ & + \sum_{i=1}^{N_{\max}-1} i^2 \eta_i(t) \sum_{n=i}^{N_{\max}-1} (n+1)^2 \eta_{n+1}(t) \cos([n+1+i]kx) + \dots \\ & \left. + \sum_{i=1}^{N_{\max}-1} i^2 \eta_i(t) \sum_{n=i}^{N_{\max}-1} (n+1)^2 \eta_{n+1}(t) \cos([n+1-i]kx) \right) \end{aligned}$$

Сделанные выше упрощения в системе уравнений и представление давления в такой форме делают возможным нахождение системы уравнений для $A_n(t)$ и $\eta_n(t)$. Приравнявая коэффициенты при соответствующих гармониках, получаем:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_i}{dt} = ikA_i(t) \\ \frac{dA_i}{dt} = ck^4 \left[\frac{1}{2} \eta_i^2 \left(\frac{i}{2} \right)^4 \delta_{i,2n} + \sum_{j=1}^{N_{\max}-1} j^2 (j-i)^2 (\eta_{i-j} \{\delta_{i-j,j} - 1\} + \eta_{j-i}) \eta_j \right], \end{cases} \quad (18)$$

где $i = \overline{1 \dots N_{\max}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определим асимптотику времени генерации всех высших гармоник для больших значений $N_{\max}$. Это можно сделать, предположив, что за первоначальную генерацию самой высокой гармоники отвечает первый член второго уравнения системы (18).

Тогда система (18) сведётся к следующему уравнению:

$$\ddot{\eta}_i = \eta_i^2 c \left(\frac{ik}{2} \right)^5 \quad (19)$$

Асимптотику при малых временах будем искать в виде: $\eta_N = \beta_N t^{2N-2}$. Тогда $\ddot{\eta}_N = \beta_N t^{2N-4} (2N-2)(2N-3)$, $\eta_{N/2} = \beta_{N/2} t^{N-2}$. Подставляя в (19), приходим к рекуррентному соотношению для коэффициентов β_N :

$$\beta_N = \beta_{N/2}^2 \frac{c(Nk/2)^5}{(2N-2)(2N-3)} \quad (20)$$

При больших N данное выражение можно заменить на

$$\beta_N \approx \beta_{N/2}^2 ck^5 \frac{N^3}{2^7} \quad (21)$$

Продолжая цепочку рекуррентных соотношений до её начала ($N=1$) находим, что при малых временах

$$\eta_N = t^{2N-2} (ck^5)^{N-1} \eta_{1,0}^N \left(\frac{N^{3+6\log_2 N}}{2^{7+14\log_2 N}} \right) \quad (22)$$

Тогда характерное время генерации старшей гармоники составит:

$$\tau \approx \frac{1}{(ck^5)^{\frac{N-1}{2N-2}} \eta_{1,0}^{\frac{N}{2N-2}}} \times \frac{2^{\frac{7+14\log_2 N}{2N-2}}}{N^{\frac{3+6\log_2 N}{2N-2}}} \quad (23)$$

При больших N :

$$\tau \approx \sqrt{\frac{1}{ck^5 \eta_{1,0}}} \left(\frac{2^{\frac{7\log_2 N}{N}}}{N^{\frac{3\log_2 N}{N}}} \right) \approx \sqrt{\frac{1}{ck^5 \eta_{1,0}}} \frac{1}{\left(N^{\frac{\ln N}{N}} \right)^{3/\ln 2}} \quad (24)$$

Раскрывая неопределённость в знаменателе, переходя к исходным обозначениям, получаем

$$\tau \approx \gamma \sqrt{\frac{\rho \lambda^5}{p_0 \eta_{1,0} L^2}}, \quad (25)$$

где γ – некоторый безразмерный коэффициент.

Из соображений размерности очевидно, что плотность и давление входят в данное выражение в единственно возможной комбинации. Необходимо проверить правильность степеней при параметрах с размерностью длины (λ , L , $\eta_{1,0}$) и зависимость от числа удерживаемых членов в потенциале $N_{\max}$. Расчёты данных степеней представлены на рис. 6 – рис. 9.

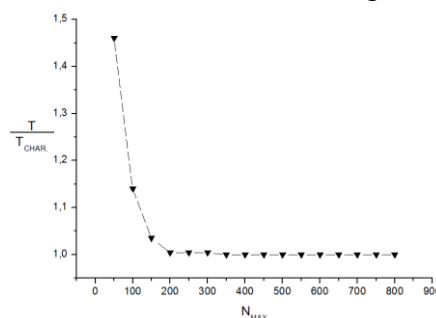


Рис. 6. Зависимость характерного времени развития последней гармоники от их общего количества. Параметры (в безразмерных единицах): $\lambda=8$, $L=0.01$, $\eta_1(0)=0.1$.

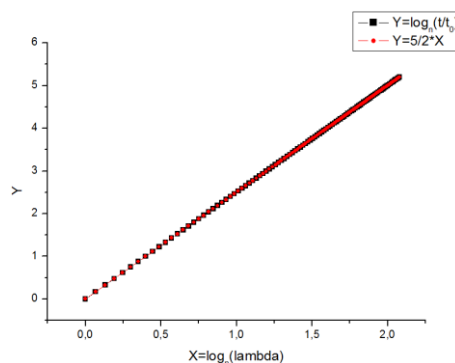


Рис. 7. Зависимость характерного времени развития последней гармоники от длины волны. Параметры (в безразмерных единицах): $\lambda=1-8$, $L=0.01$, $\eta_1(0)=0.1$, $N_{\max}=100$.

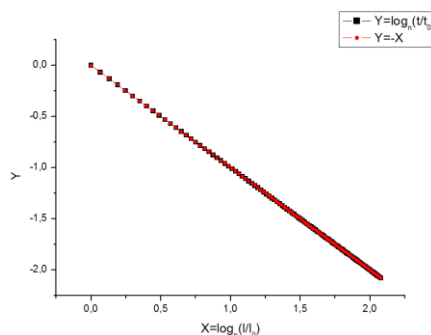


Рис. 8. Зависимость характерного времени развития последней гармоники от длины волны пробега продуктов реакции. Параметры (в безразмерных единицах): $\lambda = 1$, $L = 0.00125 - 0.01$, $\eta_1(0) = 0.1$, $N_{\max} = 100$.

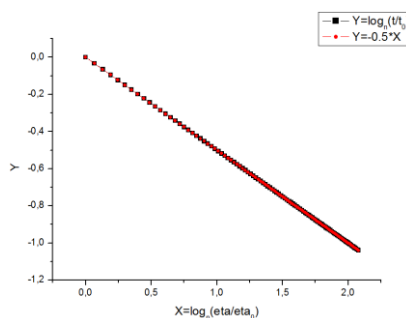


Рис. 9. Зависимость характерного времени развития последней гармоники от амплитуды начального возмущения. Параметры (в безразмерных единицах): $\lambda = 1$, $L = 0.01$, $\eta_1(0) = 0.0125 - 0.1$, $N_{\max} = 100$.

Исходя из представленных результатов, можно заключить, что степени всех параметров с размерностью длины определены правильно.

Основываясь на данных расчётах, безразмерный коэффициент γ составляет $2.6 \cdot 10^{-3}$.

Опираясь на положительность и монотонный рост всех коэффициентов ряда Фурье можно сделать заключение о стремлении формы границы к периодическому дельта-функциональному виду с периодом, равным периоду начального возмущения (см. Рис. 10). Амплитуду пиков на момент времени (25) можно приближённо оценить как

$$a(\tau) \sim \eta_0 \lambda / L \quad (26)$$

При параметрах, соответствующих расчётам, приведённым на рис. 10, данная оценка даёт $a \sim 1$.

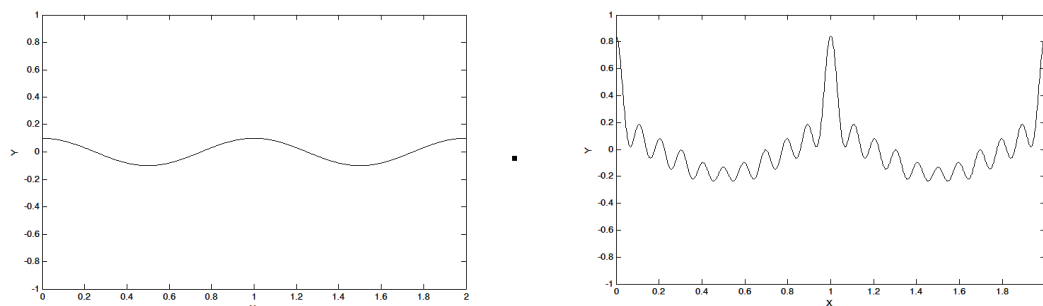


Рис. 10. Эволюция границы раздела активной и пассивной сред. Масштаб указан в длинах волн начального возмущения.

Следует отметить, что точность подобных расчётов развития границы до больших амплитуд ограничена, в частности, точностью аппроксимации кривизны границы через её вторую производную по координате.

6. Оценки для NIF.

Все оценки в данной главе сделаны на основании данных, приведённых в работе [4].

При длине пробега α - частиц в области горячей точки, приблизительно равной её размеру, невозмущённое давление на поверхность холодного плотного топлива, вызванное торможением α - частиц в нём:

$$\tilde{P}_0 \approx \sqrt{\frac{m_{He} E_{He,0}}{2}} \frac{n^2 \langle \sigma v \rangle R_{HS}}{3},$$

что составляет 0.35 ППа, при уровне основного давления в 1.5 ППа. Пробег α - частиц в холодном плотном топливе, рассчитанный в GEANT4: ~ 0.05 мкм. В связи с этим, давление на границе раздела может быть представлено в виде (12). Соответствующая оценка для времени развития возмущений приводит к выражению $\tau \approx 7.8 \sqrt{\lambda^5 / \eta_{1,0}}$.

На рис. 11 приведена зависимость времени развития неустойчивости от длины волны возмущения для случая $\eta_{1,0} = 0.1\lambda$. Согласно [4] время горения ~ 130 – 180 пс. Как видно из рисунка, при таких начальных условиях за время горения успевают развиваться возмущения с $\lambda < 5$ мкм.

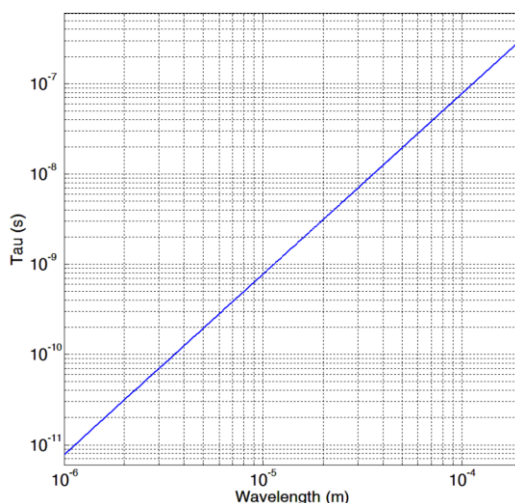


Рис. 11. Зависимость времени развития возмущений от их длины волны.

Оценим возможный масштаб струйных выбросов холодного плотного топлива. Полагая длину волны и амплитуду начального возмущения 5 мкм и 0.5 мкм соответственно, в соответствии с (26) получаем, что на момент времени ~ 150 пс длина образующихся струй холодного плотного топлива составит ~ 50 мкм. Вследствие наличия ряда сделанных предположений и упрощений, нам кажется необходимым сделать замечание о том, что данная оценка по своей сути является оценкой "сверху". Тем не менее, в связи с тем, что оцененный выше масштаб струйных выбросов холодного плотного топлива в область горячей точки сравним с её размерами (согласно [4], $R_{Hot Spot} \sim 32$ мкм), необходимо проведение более точного численного анализа.

7. Заключение.

В работе рассматривалась неустойчивость, развивающаяся на границе раздела активной и пассивной сред. Для начала требовалось определить критерий применимости уравнений гидродинамики. Для этого была проведена оценка поправки к равновесной функции распределения частиц пассивной среды. На основе данной оценки были определены границы применимости гидродинамического приближения. В результате было показано, что использование уравнений гидродинамики правомерно при выполнении условия:

$$\frac{Q}{n_L} \frac{\sigma_{LA}}{\sigma_{LL}} \left(\sqrt{\frac{m_L}{kT_L}} + \frac{m_L v_A}{kT_L} \right) \ll 1.$$

С помощью использования теории потенциальных течений найден инкремент роста малых возмущений границы раздела. В случае $h \gg \lambda$ выражение для инкремента принимает следующий вид:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{k(\rho_{nacc} g_{nacc} - \rho_{акт} g_{акт.})}{\rho_{nacc} \coth(kl_{nacc}) + \rho_{акт} \coth(kl_{акт})}}$$

В случае $h \ll \lambda$ обнаружена возможность генерации в системе высших гармоник вплоть до гармоники с номером $N_{\max} \sim \lambda/h$. Получена система уравнений, определяющих эволюцию границы раздела и оценено время генерации всех гармоник с номерами от 2 до

$$N_{\max} : \tau \approx 2.6 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\rho \lambda^5}{\tilde{\Pi}_0 \beta \eta_{h,0} L^2}}.$$

Оценено влияние рассмотренной неустойчивости на процессы перемешивания в мишенях ИТС. Показано, что при параметрах, соответствующих мишеням, использующихся в установке NIF, перенос импульса α -частицами может за время горения приводить к дополнительному росту коротковолновых возмущений границы "горячей точки" с длиной волны менее 5 мкм. Показано, что длина струйных выбросов при такой длине волны начального возмущения становится сравнимой с геометрическим размером "горячей точки". В связи с тем, что такие выбросы способны значительно охлаждать область "горячей точки", нам кажется необходимым продолжать дальнейшее исследование данного эффекта.

8. Приложение 1.

Перейдём в систему отсчёта, связанную с осколками реакции. Предположим, что масса активных частиц много больше массы лёгких. Тогда при столкновении осколка реакции с лёгкой частицей, импульс последней не изменяется по абсолютной величине. В рассматриваемой системе отсчёта напомним выражение для максвелловской функции распределения лёгких частиц.

$$f_L^{[0]}(\vec{p}_L) = \frac{n_L}{(2\pi m_L kT_L)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\vec{p}_L + m_L \vec{v}_A(t))^2}{2m_L kT_L}\right),$$

где $\vec{v}_A(t)$ - скорость активных частиц в лабораторной системе координат; $\vec{p}_L$ - импульс лёгкой частицы в системе центра инерции.

Для рассеянных лёгких частиц функция распределения имеет вид:

$$f_L^{[0]}(\vec{p}_L') = \frac{n_L}{(2\pi m_L kT_L)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{(\vec{p}_L' + m_L \vec{v}_A(t))^2}{2m_L kT_L}\right),$$

где $\vec{p}_L' = \mu_{LA} \nu_{LA} \vec{n}' + \frac{m_L}{m_L + m_A} (\vec{p}_L + \vec{p}_A)$. В пределе $m_A \gg m_L$ имеем $\vec{p}_L' = p_L \vec{n}'$

В рассматриваемой системе отсчёта осколки реакции “стоят”. Тогда $\int d\vec{p}_A f_A = \int d\vec{p}_A f_A' = n_A$. В предположении изотропного и не зависящего от относительной скорости сталкивающихся частиц сечения рассеяния, интеграл столкновений Больцмана принимает следующий вид

$$I_{st} \left(f_L^{[0]}, f_A^{[0]} \right) = n_A \nu_L \sigma_{AL} \int \frac{dO_{\vec{n}'}}{4\pi} \left(f_L^{[0]}(\vec{p}_L') - f_L^{[0]}(\vec{p}_L) \right) \quad (\text{П1.1})$$

Обозначим $I_{st} = I_1 - I_2$, где

$$\begin{cases} I_1 = \frac{n_A \nu_L \sigma_{AL}}{4\pi} 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{n_L}{(2\pi m_L k T_L)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{p_L^2 + m_L^2 \nu_A^2(t)}{2m_L k T_L} \right) \exp \left(-\frac{p_L m_L \nu_A(t)}{m_L k T_L} \cos \theta \right) \\ I_2 = n_A \nu_L \sigma_{AL} \frac{n_L}{(2\pi m_L k T_L)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{(\vec{p}_L + m_L \vec{\nu}_A(t))^2}{2m_L k T_L} \right) \end{cases} \quad (\text{П1.2})$$

Производя несложные вычисления, приходим к следующему выражению для I_{st} .

$$\begin{aligned} I_{st} &= \frac{n_L n_A \sigma_{AL}}{(2\pi m_L k T_L)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{p_{L,C}^2 + m_L^2 \nu_A^2(t)}{2m_L k T_L} \right) \times \\ &\times \left[\frac{k T_L}{m_L \nu_A(t)} \text{sh} \left(\frac{p_{L,C} \nu_A(t)}{k T_L} \right) - \frac{p_{L,C}}{m_L} \exp \left(-\frac{p_{L,C} \nu_A(t) \cos \Psi_C}{k T_L} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

От этого выражения легко перейти к интегралу столкновений в лабораторной системе отсчёта путём замены в (П1.3)

$$\vec{p}_C = \vec{p}_{lab} - m \vec{\nu}_A(t); \quad \vec{r}_C = \vec{r}_{lab} - \int \vec{\nu}_A(t) dt, \quad \cos \Psi_C = \frac{p_{lab} \cos \Psi_{lab} - m_L \nu_A(t)}{\sqrt{p_{lab}^2 - 2 p_{lab} m_L \nu_A(t) \cos \Psi_{lab} + m_L^2 \nu_A^2(t)}}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_{st} &= \frac{n_{L,lab} n_{A,lab} \sigma_{AL}}{(2\pi m_L k T_L)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{p_{L,lab}^2 - 2 m_L p_{L,lab} \nu_A(t) \cos \Psi_{lab} + 2 m_L^2 \nu_A^2(t)}{2 m_L k T_L} \right) \times \\ &\times \left[\frac{k T_L}{m_L \nu_A(t)} \text{sh} \left(\frac{\nu_A(t) \sqrt{p_{L,lab}^2 - 2 m_L p_{L,lab} \nu_A(t) \cos \Psi_{lab} + m_L^2 \nu_A^2(t)}}{k T_L} \right) - \right. \\ &- \frac{\sqrt{p_{L,lab}^2 - 2 m_L p_{L,lab} \nu_A(t) \cos \Psi_{lab} + m_L^2 \nu_A^2(t)}}{m_L} \times \\ &\times \left. \exp \left(-\frac{\nu_A(t) (p_{L,lab} \cos \Psi_{lab} - m_L \nu_A(t))}{k T_L} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

Далее везде работаем в лабораторной системе отсчёта, поэтому в (П1.4) опускаем индексы “lab”.

Воспользуемся асимптотическим видом интеграла столкновений (П1.4) при больших $v_A(t)$:

$$I_{st} = -f_L^{[0]} n_A \sigma_{LA} v_A(t) \quad (\text{П1.5})$$

Данное аналитическое выражение для интеграла столкновений было получено в предположении, что лёгкая пассивная среда испытывает взаимодействие с плоским слоем летящих осколков реакции. Его обобщение для случая взаимодействия с протяжённой группой частиц достаточно очевидно и выглядит следующим образом:

$$I_{st} = -f_L^{[0]} \sigma_{LA} Q. \quad (\text{П1.6})$$

9. Приложение 2.

Определим зависимость импульса, переданного центральному элементу от кривизны границы для случая $y_0 = 0$. При любых других значениях параметра y_0 эта величина будет монотонно убывать.

Величина переданного импульса напрямую зависит от тормозной способности среды, т.е. от типа продуктов реакций. Далее, остановимся на случае заряженных продуктов реакции, как на наиболее практически ценном.

Импульс частицы, влетающей в тормозящую среду имеет следующий вид: $p = p_0 \sqrt[4]{1-r/L}$ [11]; где L – пробег заряженной частицы до полной остановки. Поэтому, величина импульса, переданного элементу среды с площадью $dx_{\text{пол}} dy_{\text{пол}}$ от элемента активной среды с площадью $dx_{\text{ист}} dy_{\text{ист}}$ составляет:

$$dP = \frac{Qp_0}{8\pi L} \frac{dx_{\text{ист}} dy_{\text{ист}} dx_{\text{пол}} dy_{\text{пол}}}{r [1-r/L]^{\frac{3}{4}}} \quad (\text{П2.1})$$

Вычисление интегралов проведём для случая выпуклой вверх границы. Перейдём к полярным координатам. Область интегрирования указана на рис. 12.

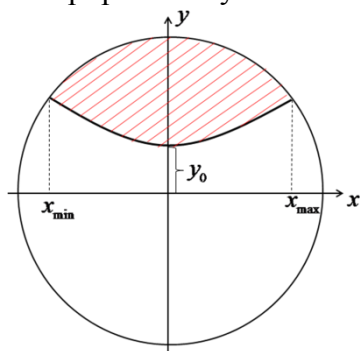


Рис. 12. Область интегрирования.

$$P_y = \iint \sin \varphi \frac{Qp_0}{8\pi L} \frac{r dr d\varphi}{r [1-r/L]^{\frac{3}{4}}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{r(\varphi)} \frac{Qp_0}{8\pi L} \frac{dr}{[1-r/L]^{\frac{3}{4}}} = \frac{Qp_0}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{r(\varphi)} d \left[1 - \frac{r}{L} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\text{П2.2})$$

Вычисление интеграла в приближении $L \ll R$ приводит к:

$$P_y \approx -\frac{Qp_0}{\pi} \left(1 - \frac{29}{180} \frac{L^2}{R^2} \right), \quad (\text{П2.3})$$

где R – радиус кривизны границы.

10. Приложение 3.

Сила, действующая на произвольный элемент двумерной двухслойной системы с возмущённой границей определялась путём векторного суммирования потоков продуктов реакций, приходящих в данный элемент от элементов активной среды. Для упрощения аналитических оценок и численной реализации в программном комплексе MATLAB было использовано предположение о равенстве длин пробега продуктов реакции в активной и пассивной среде ($l_1 = l_2 = L$). С учётом данного упрощения, ускорение находилось следующим образом (см. рис. 13):

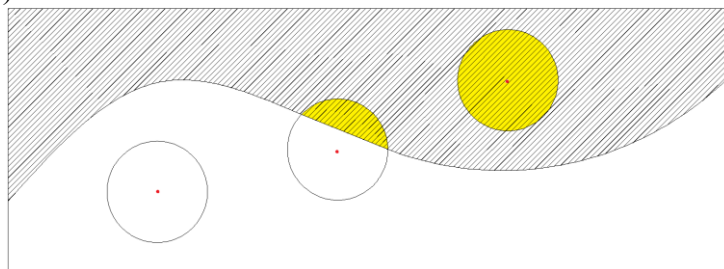


Рис. 13. Схема вычисления поля силы в MATLAB

1. Выбирался элемент, в котором вычисляется сила (красная точка).
2. Находились все элементы, лежащие внутри круга радиуса L с центром в выбранном элементе.

3. Из этих элементов выбирались те, которые принадлежат к числу активных (заштрихованы жёлтым цветом), затем векторным образом суммировались вклады от них.

Расчёты в MATLAB были верифицированы сравнением с результатами аналогичных расчётов в GEANT4 [12] (см. Рис. 14).

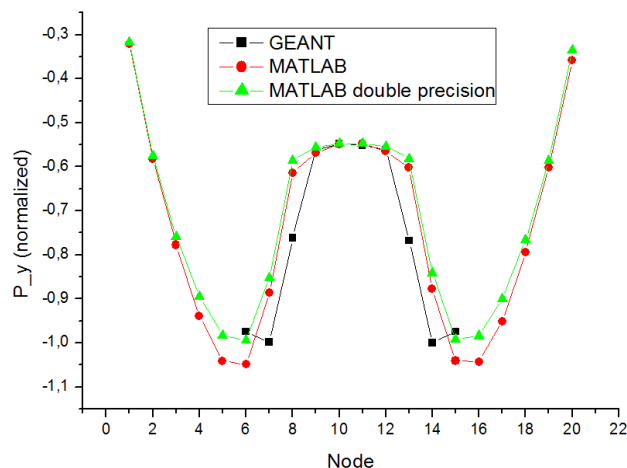


Рис. 14. Сравнение расчётов, проведённых с помощью MATLAB и GEANT4

Литература.

1. V. A. Lykov. The effect of momentum transfer by fast particles on the hydrodynamic instabilities in the ICF targets. AIP Conference Proceedings 318, 403 (1994).
2. Lord Rayleigh, Proc. London Math. Soc. 14 (1883) 170.
3. Kull H.J. Theory of the RTI // Physics Reports. 1991. V. 206. P.197
4. Hurricane O.A. et al. Fuel gain exceeding unity in an inertially confined fusion implosion. Nature (2014) doi:10.1038/nature1308
5. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
6. T. R. Dittrich et al., Phys. Rev. Lett. 112, 055002 (2014)

7. Лифшиц. Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979
8. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. – М.: Наука, 1971
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т VI. Гидродинамика. – 3 е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1986.
10. Иногамов Н.А., Демьянов А.Ю., Сон Э.Е. Гидродинамика перемешивания.-М.: Изд-во МФТИ, 1999.-464 с.-ISBN 5-89155-017-2
11. Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И. Флуктуации пробега заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988. <http://www.cern.ch/geant4>