

# The Rotation of Spherical Body in Viscous Suspension

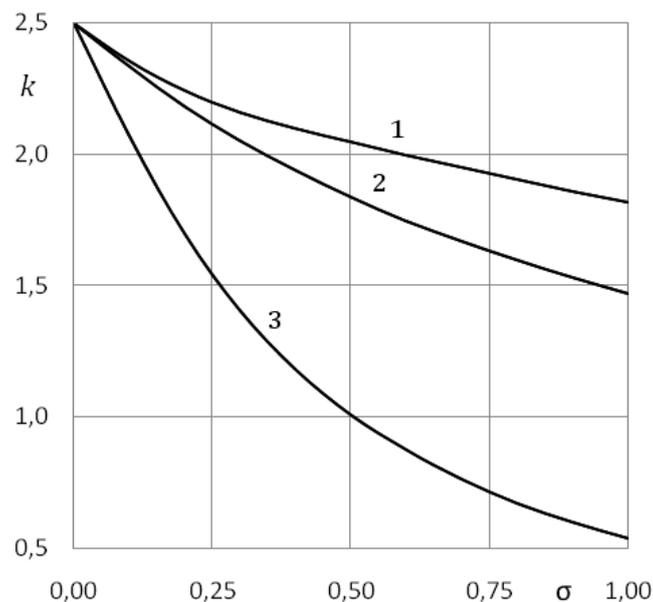
O.B. Gus'kov

*Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, 125040, Russia*  
ogskv@mail.ru

## Abstract

We consider the problem of the rotational motion of a spherical body in an unbounded viscous suspension in the Stokes approximation for the carrier continuous medium. An expression is obtained for the torque acting on the body in the first approximation in the volume fraction of the dispersed phase. Based on the solution obtained an expression is found for the effective viscosity of suspension, "as seen" by the body while rotating in a dispersed medium. It is shown that the coefficient for the volume fraction in the formula for the effective viscosity of suspension depends on the scale factor – the ratio of radius of dispersed particles and a body. Based on a comparison with the results of the previously discussed problems of the translational motion of a solid sphere and a spherical bubble in a viscous suspension it is shown that the effective viscosity of suspension depends also on the boundary conditions on the surface of the body and on the character of its motion in dispersed medium. In the particular case when the size of the dispersed particles is negligible compared to the size of the body, all the formulae obtained coincide with Einstein's result.

Keywords: hydrodynamic interaction, dispersed medium, viscosity, suspension, self-consistent field method



The dependence of  $k(\sigma)$  in the formula for the effective viscosity of suspension  $\bar{\mu} = \mu (1 + k(\sigma)c)$  for the cases: 1 – translational motion of a solid sphere in suspension; 2 – translational motion of a spherical bubble in suspension; 3 – rotation of a rigid sphere in suspension. Here  $c$  is the volume fraction of dispersed particles,  $\mu$  is the viscosity of carrying liquid and  $\sigma$  is the ratio of the radius of dispersed particles to the radius of the spherical body

# О вращении сферического тела в вязкой суспензии

О.Б. Гуськов

*Институт Прикладной Механики РАН, Россия, Москва, 125040, Ленинградский пр., 7  
ogskv@mail.ru*

## Аннотация

Рассмотрена задача о вращательном движении сферического тела в безграничной вязкой суспензии в приближении Стокса для несущей сплошной среды. Получено выражение для момента сил, действующего на тело, в первом приближении по объемной концентрации дисперсной фазы. На основе полученного решения найдено выражение для эффективной вязкости суспензии, как ее «видит» тело при вращении в дисперсной среде. Показано, что коэффициент при объемной концентрации в формуле для эффективной вязкости суспензии зависит от масштабного фактора – отношения размеров дисперсных частиц и тела. На основе сравнения с результатами ранее рассмотренных задач о поступательном движении твердой сферы и сферического пузыря в вязкой суспензии показано, что эффективная вязкость суспензии зависит также от граничных условий на поверхности тела и характера его движения в дисперсной среде. В частном случае, когда размер дисперсных частиц пренебрежимо мал по сравнению с размером тела, все полученные формулы совпадают с результатом Эйнштейна.

Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие, дисперсная среда, вязкость, суспензия, метод самосогласованного поля.

## 1. Введение

Потоки дисперсных сред лежат в основе, как многих природных явлений, так и многочисленных технологических процессов различных промышленных производств. В связи с этим изучение законов динамики таких потоков, а также процессов переноса в них представляют собой важную задачу как с научной, так и с практической точек зрения.

В теоретическом плане для решения этих проблем необходимо учитывать влияние гидродинамического и иного взаимодействия частиц при их совместном движении в дисперсной среде. По сути, эта задача является разновидностью одной из фундаментальных научных проблем, известной под названием «проблемы многих тел», которая пока не имеет точного решения. Исключительная сложность проблемы приводит к необходимости построения различных упрощенных моделей, позволяющих приближенно учесть гидродинамическое взаимодействие большого числа дисперсных частиц при их совместном движении в жидкости. Первыми из методов учета гидродинамического взаимодействия частиц в приближении Стокса были метод единичной ячейки Каннингэма [1] и метод отражений Смолуховского [2]. На основе использования их модификаций в сочетании с методами статистической физики были получены многие важные результаты по динамике вязких суспензий и эмульсий.

В 1980–х годах академиком В.В. Струминским и его учениками был разработан новый приближенный метод [3,4] на основе использования известной в науке концепции самосогласованного поля применительно к модельным полям возмущений от дисперсных частиц. Это позволило учесть эффекты гидродинамического взаимодействия частиц при движении кластеров, содержащих сотни таких частиц, как в безграничной жидкости [3], так и в присутствии внешних границ различной геометрии [4–6]. Затем применительно к случаю иде-

альной несущей сплошной среды на основе той же концепции был разработан новый более точный метод [7]. В рамках этого метода исходную граничную задачу удалось свести в математическом плане к существенно более простой задаче, что позволило получить ряд новых результатов по динамике невязких суспензий [8–11] и процессам переноса в них [12–13].

В работе автора [14] физическая идея согласования полей возмущений, сформулированная В.В. Струминским с соавторами [3, 4], была применена уже не к модельным, а к точным полям возмущений от дисперсных частиц. В качестве таковых было использовано точное решение Шмица и Фельдерхофа (ШФ) [15] для возмущения от сферы в произвольном внешнем потоке. Оригинальной особенностью полученного ими решения является то, что тензорные коэффициенты в функциональных рядах, описывающих это решение, определенным образом вычисляются через характеристики внешнего по отношению к частице потока. Это позволило сформулировать точное математическое соотношение, связывающее (согласующее) между собой все поля возмущений от дисперсных частиц. Это соотношение одновременно является условием выполнения граничных условий на поверхности всех частиц. Таким образом, исходная классическая граничная задача  $N$  сфер в безграничной вязкой жидкости в рамках такого подхода фактически переформулирована – записано точное решение задачи в виде суперпозиции полей возмущений вида ШФ [15], а для тензорных коэффициентов произвольного ранга, относящихся к разным частицам, сформулировано точное условие их согласования между собой, имеющее единый вид для всех возможных значений числа частиц  $N$  и ранга тензоров  $n$ . В связи с этим разработанный подход к решению задач динамики  $N$  сфер в жидкости был назван методом самосогласованного поля (МСП).

В переформулированном виде в рамках МСП любая квазистационарная задача  $N$  сфер в безграничной вязкой жидкости сводится к формальному решению полученных соотношений относительно тензорных коэффициентов. При этом разным физическим задачам соответствует просто разный набор заданных и искомых величин. Важно также отметить, что в переформулированном виде задача уже не «обременена» граничными условиями на сферах, т.к. гарантом их удовлетворения являются сами условия согласования полей возмущений.

Для разбавленных дисперсных сред все искомые величины можно искать в виде степенных рядов по малому параметру  $\epsilon$ , представляющему собой отношение радиуса дисперсных частиц к характерному расстоянию между центрами соседних частиц. Подстановка таких представлений в полученные условия согласования полей возмущений от дисперсных частиц при решении любой физической задачи приводит к рекуррентному соотношению, в котором каждое последующее приближение для любой искомой величины вычисляется через предыдущие приближения тех же величин. Это дает возможность вычислять в аналитическом виде все искомые в задаче величины в любом заданном приближении по малому параметру.

К полученным таким образом результатам решения различных физических задач динамики  $N$  сфер в вязкой жидкости применима процедура осреднения [16, 17] по различным конфигурациям частиц в пространстве. Это дает возможность перехода от пространственно конечных систем, содержащих любое, но конечное число частиц  $N$ , к бесконечным средам и получения осредненных характеристик таких сред.

В работе автора [18] на основе МСП с последующей процедурой усреднения [16, 17] была решена задача о сопротивлении твердого сферического тела при его поступательном движении с заданной скоростью в однородной суспензии твердых сферических частиц. В результате была получена поправка к формуле Стокса для сопротивления сферы в первом приближении по объемной концентрации  $c$  дисперсной фазы вида

$$\bar{\mu} = \mu(1 + kc), \quad (1)$$

имеющая физический смысл эффективной вязкости среды, сквозь которую движется тело. Однако, в отличие от формулы Эйнштейна [19] коэффициент  $k$  в зависимости вида (1) представляет собой не число, а функцию, зависящую от параметра  $\sigma$  – отношения радиуса дисперсных частиц к радиусу тела.

Применение описанной выше процедуры для решения аналогичной задачи о поступательном движении сферического пузыря в однородной суспензии приводит [20] к другой функциональной зависимости  $k(\sigma)$  в формуле для эффективной вязкости вида (1).

Ниже рассмотрена задача о вращении твердой сферы произвольного размера в вязкой однородной суспензии на основе использования МСП [14] с последующей процедурой усреднения [16, 17] полученных результатов по различным возможным конфигурациям частиц в пространстве.

## 2. Вращение сферы в жидкости в присутствии конечного числа частиц

Рассмотрим задачу о вращении твердой сферы радиуса  $b$  с заданной угловой скоростью  $\Omega_\alpha$  в вязкой несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, в присутствии  $N$  твердых сферических частиц радиуса  $a$ . Пронумеруем все частицы от 1 до  $N$  и обозначим координаты их центров как  $x_\alpha^{(i)}$ , а линейные и угловые скорости – как  $U_\alpha^{(i)}$  и  $\Omega_\alpha^{(i)}$  соответственно. Классическая граничная задача для определения поля скорости и давления  $(v_\alpha, p)$  в жидкости в приближении уравнений Стокса имеет вид

$$\begin{aligned} v_{\alpha,\beta\beta} &= p_{,\alpha}, \quad v_{\alpha,\alpha} = 0; \quad v_\alpha \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty \\ v_\alpha &= U_\alpha^{(i)} + e_{\alpha\beta\gamma} \Omega_\beta^{(i)} X_\gamma^{(i)} \text{ при } R_i = \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ v_\alpha &= e_{\alpha\beta\gamma} e_\beta X_\gamma^{(0)} \text{ при } R_0 = \omega, \quad e_\beta = \frac{\Omega_\beta}{\Omega} \end{aligned} \quad (2)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} X_\alpha^{(i)} &= x_\alpha - x_\alpha^{(i)}, \quad R_i = \sqrt{X_\alpha^{(i)2}}, \quad i = 0, 1, \dots, N \\ \epsilon &= \frac{a}{L}, \quad \omega = \frac{b}{L}, \quad f_{\alpha,\beta} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad f_{\alpha,\beta\beta} = \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\beta^2}, \quad r = \sqrt{x_\alpha^2} \end{aligned}$$

$e_{\alpha\beta\gamma}$  – символ Леви – Чивиты;  $e_\beta$  – единичный вектор в направлении угловой скорости  $\Omega_\beta$ .

Соотношения (2) представляют собой запись уравнений Стокса с граничными условиями прилипания жидкости на поверхности твердой сферы и частиц.

Задача (2) записана в безразмерном виде, где в качестве масштабов величин приняты характерное расстояние между центрами соседних пузырьков  $L$ , заданная угловая скорость твердой сферы  $\Omega$  и давление  $\mu\Omega$ . В записи формул (2) и далее приняты тензорные обозначения величин с условием о суммировании по повторяющимся нижним координатным индексам, каждый из которых может принимать значения от 1 до 3 (по количеству пространственных координат). Это условие не распространяется только на переменную  $R_i$ . Верхние индексы относятся к частицам, и чтобы отличать их от показателя степени, они заключены в круглые скобки.

В рамках МСП [14] граничная задача о совместном движении  $N$  сфер в вязкой жидкости сведена к формальной процедуре решения линейной бесконечной системы алгебраических уравнений относительно тензорных коэффициентов, входящих в полученное точное решение задачи. Используя методику работы [14] при построении этого решения для задачи (1), когда размер тела отличен от размера дисперсных частиц, не сложно показать, что оно имеет вид

$$v_\alpha = \sum_{i=0}^N v_\alpha^{(i)} \quad p = \sum_{i=0}^N p^{(i)} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v_\alpha^{(i)} = & - \sum_{k=0}^{\infty} H_{\alpha\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)} \frac{\epsilon_i^{2k+1}}{2(k+2)} \left( 3F_{\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+1)} + (2k+1)\epsilon_i^2 F_{\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+3)} \right) - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} H_{\beta\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)} \frac{(2k+1)(2k+3)\epsilon_i^{2k+1}}{2(k+2)} \left( F_{\alpha\beta\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+3)} - \epsilon_i^2 F_{\alpha\beta\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+5)} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} H_{\gamma_1 \alpha \gamma_2 \dots \gamma_k}^{(i)} \frac{k(2k+1)\epsilon_i^{2k+1}}{2(k+2)} \left( F_{\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+1)} - \epsilon_i^2 F_{\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+3)} \right) + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} H_{\beta\gamma\gamma\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)} \epsilon_i^{2k-1} \left( \frac{(k-1)^2(2k+3)\epsilon_i^2}{2(k+2)} F_{\alpha\beta\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+1)} - \right. \\ & \left. - \frac{k(2k+1)(k-1)\epsilon_i^4}{4(k+2)} F_{\alpha\beta\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+3)} - \frac{(2k-3)(k-1)}{4} F_{\alpha\beta\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k-1)} \right) - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} H_{\alpha\gamma\gamma\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)} \epsilon_i^{2k-1} \left( \frac{(k^2 - k - 3)(k-1)\epsilon_i^2}{2(k+2)} F_{\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k-1)} - \right. \\ & \left. - \frac{k(k-1)^2\epsilon_i^4}{4(k+2)} F_{\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+1)} - \frac{(k-3)(k-1)}{4} F_{\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k-3)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p^{(i)} = & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+3)\epsilon_i^{2k+1}}{(k+2)} H_{\beta\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)} F_{\beta\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+3)} + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} H_{\beta\gamma\gamma\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)} \frac{k(k-1)\epsilon_i^{2k-1}}{2} \left( \frac{(2k+3)\epsilon_i^2}{(k+2)} F_{\beta\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+1)} - \frac{(2k-3)}{k} F_{\beta\gamma_3 \dots \gamma_k}^{(i)(2k-1)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

где приняты обозначения:

$$F_{\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)(2k+l)} = \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_k}^{(i)}}{R_i^{2k+l}} \quad \text{при } i = 0, 1, \dots, N; \quad \epsilon_0 = \omega, \quad \epsilon_i = \epsilon \quad \text{при } i \neq 0 \quad (6)$$

а заранее неизвестные тензорные коэффициенты  $H_{\alpha\gamma_1 \dots \gamma_k}^{(i)}$ , входящие в выражения (4)–(5), удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(0)} = \sum_{i \neq 0} Z_\alpha^{(i,0)}, \quad H_{\alpha\beta_1}^{(0)} = -e_{\alpha\beta\beta_1} e_\beta + \sum_{i \neq 0} Z_{\alpha\beta_1}^{(i,0)}, \quad H_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(0)} = \sum_{i \neq 0} Z_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(i,0)} \quad \text{при } n \geq 2 \\ H_\alpha^{(j)} + \frac{1}{3}\epsilon^2 H_{\alpha\gamma\gamma}^{(j)} = 0, \quad H_{\alpha\beta_1}^{(j)} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i \neq j} Z_{\alpha\beta_1}^{(i,j)} + \sum_{i \neq j} Z_{\beta_1\alpha}^{(i,j)} \right) \quad \text{для } j \neq 0 \end{aligned}$$

$$H_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(j)} = Z_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq 0}} Z_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)}, \quad \text{для } j \neq 0 \text{ и } n \geq 2 \quad (7)$$

Тензор  $Z_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)}$  в соотношениях (7) определяется формулой, аналогичной (4), если в ней заменить тензор  $F_{\gamma_1\dots\gamma_k}^{(i)(2k+l)}$ , определяемый первым равенством в формулах (6), на тензор

$$Q_{\gamma_1\dots\gamma_k, \beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+l)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\beta_1} \dots \partial x_{\beta_n}} \left( \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_k}^{(i)}}{R_i^{2k+l}} \right) \Big|_{R_j=0} \quad (8)$$

После решения системы уравнений (7) скорости частиц  $U_\alpha^{(j)}$  и момент сил  $T_\alpha^{(0)}$ , действующих на тело, вычисляются [14] по формулам

$$U_\alpha^{(j)} = -H_\alpha^{(j)} + Z_\alpha^{(0,j)} + \sum_{\substack{i \neq j \\ i \neq 0}} Z_\alpha^{(i,j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad T_\alpha^{(0)} = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} H_{\gamma\beta}^{(0)} \quad (9)$$

В качестве масштаба момента сил выбрана величина  $8\pi\mu b^3\Omega$ . Последнее соотношение в формулах (9) представляет собой запись теоремы Факсена [21], определяющей точное выражение для момента сил, действующих на сферическое тело, через характеристики внешнего по отношению к нему потока.

Таким образом, в рамках МСП [14] исходная граничная задача (2) сводится к формальной процедуре решения линейной бесконечной ( $0 \leq n < \infty$ ) системы алгебраических уравнений (7) относительно тензорных коэффициентов  $H_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_n}^{(i)}$ , входящих в точное решение (3)–(6) этой задачи. Решить систему уравнений (7) в точном виде пока не представляется возможным вследствие сложности самой проблемы многих тел. Однако, если ограничиться рассмотрением разбавленной суспензии, для которой параметр  $\epsilon$  мал, несложно построить процедуру приближенного решения этой системы уравнений.

При  $\epsilon \ll 1$  все искомые функции можно искать в виде разложений по степеням этого параметра

$$H_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(j)} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m H_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(j)(m)}, \quad U_\alpha^{(j)} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m U_\alpha^{(j)(m)} \quad (10)$$

После подстановки этих разложений в систему уравнений (7) и приравнивания членов при одинаковых степенях малого параметра образуется следующая система рекуррентных соотношений:

$$H_\alpha^{(0)(m)} = \sum_{i \neq 0} G_\alpha^{(i,0)(m)} \quad \forall m; \quad H_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(0)(m)} = \sum_{i \neq 0} G_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(i,0)(m)}, \quad m \geq 1 \cup n \geq 0$$

$$H_{\alpha\beta_1}^{(0)(0)} = -e_{\alpha\beta\beta_1} e_\beta + \sum_{i \neq 0} G_{\alpha\beta_1}^{(i,0)(0)}$$

$$H_\alpha^{(j)(0)} = H_\alpha^{(j)(1)} = 0; \quad H_\alpha^{(j)(m)} = -\frac{1}{3} H_{\alpha\gamma\gamma}^{(j)(m-2)}, \quad m \geq 2$$

$$H_{\alpha\beta_1}^{(j)(m)} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i \neq j} G_{\alpha\beta_1}^{(i,j)(m)} + \sum_{i \neq j} G_{\beta_1\alpha}^{(i,j)(m)} \right); \quad H_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(j)(m)} = \sum_{i \neq j} G_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(m)}, \quad n \geq 2 \quad (11)$$

где тензоры  $G_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(m)}$  определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(m)} = & - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2(k+2)} \left( 3H_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-1)} Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+1)} \right. \\
 & \left. + (2k+1)(2k+3)H_{\beta\gamma_1\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-1)} Q_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+3)} \right) \\
 & + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor} \frac{(2k+1)}{2(k+2)} \left( -H_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-3)} Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+3)} + (2k+3)H_{\beta\gamma_1\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-3)} Q_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+5)} \right) \\
 & + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{k(2k+1)}{2(k+2)} H_{\gamma_1\alpha\gamma_2\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-1)} Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+1)} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor} \frac{k(2k+1)}{2(k+2)} H_{\gamma_1\alpha\gamma_2\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-3)} Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+3)} \\
 & + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{m-3}{2} \rfloor} \frac{k(k-1)}{4(k+2)} \left( -(2k+1)H_{\beta\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-3)} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+3)} + (k-1)H_{\alpha\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-3)} Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+1)} \right) \\
 & + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \frac{(k-1)}{4} \left( -(2k-3)H_{\beta\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k+1)} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k-1)} + (k-3)H_{\alpha\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k+1)} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k-3)} \right) \\
 & + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(k-1)}{2(k+2)} \left( (k-1)(2k+3)H_{\beta\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-1)} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k+1)} \right. \\
 & \left. - (k^2 - k - 3)H_{\alpha\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(i)(m-2k-1)} Q_{\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(i,j)(2k-1)} \right), \quad i \neq 0 \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{\alpha\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(m)} = & - \sum_{k=0}^{\infty} H_{\alpha\gamma_1\dots\gamma_k}^{(0)(m)} \frac{\omega^{2k+1}}{2(k+2)} \left( 3Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+1)} + (2k+1)\omega^2 Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+3)} \right) \\
 & - \sum_{k=0}^{\infty} H_{\beta\gamma_1\dots\gamma_k}^{(0)(m)} \frac{(2k+1)(2k+3)\omega^{2k+1}}{2(k+2)} \left( Q_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+3)} - \omega^2 Q_{\alpha\beta\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+5)} \right) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} H_{\gamma_1\alpha\gamma_2\dots\gamma_k}^{(0)(m)} \frac{k(2k+1)\omega^{2k+1}}{2(k+2)} \left( Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+1)} - \omega^2 Q_{\gamma_1\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+3)} \right) \\
 & + \sum_{k=2}^{\infty} H_{\beta\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(0)(m)} \omega^{2k-1} \left( \frac{(k-1)^2(2k+3)\omega^2}{2(k+2)} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+1)} \right. \\
 & \left. - \frac{k(2k+1)(k-1)\omega^4}{4(k+2)} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+3)} - \frac{(2k-3)(k-1)}{4} Q_{\alpha\beta\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k-1)} \right) \\
 & - \sum_{k=2}^{\infty} H_{\alpha\gamma\gamma\gamma_3\dots\gamma_k}^{(0)(m)} \omega^{2k-1} \left( \frac{(k^2 - k - 3)(k-1)\omega^2}{2(k+2)} Q_{\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k-1)} \right. \\
 & \left. - \frac{k(k-1)^2\omega^4}{4(k+2)} Q_{\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k+1)} - \frac{(k-3)(k-1)}{4} Q_{\gamma_3\dots\gamma_k,\beta_1\dots\beta_n}^{(0,j)(2k-3)} \right) \tag{13}
 \end{aligned}$$

Квадратные скобки над знаком суммы в равенстве (12) означает целую часть числа, а тензор  $Q_{\gamma_1 \dots \gamma_k, \beta_1 \dots \beta_n}^{(i,j)(2k+l)}$  определен равенством (8).

Решая систему уравнений (11 – 13) последовательно для разных значений  $m$ , начиная с  $m = 0$ , можно получить выражения для тензоров  $H_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(j)(m)}$  в аналитическом виде в заданном приближении по малому параметру  $\epsilon$ . Подставляя затем полученное решение в формулы (9), можно получить выражения для скорости частиц и момента сил, действующих на тело, в том же приближении по малому параметру.

Решение системы уравнений (11 – 13) с точностью до  $O(\epsilon^7)$  приводит к следующему выражению для момента сил  $T_\alpha^{(0)}$ , действующих на тело:

$$T_\alpha^{(0)} = \sum_{m=0}^7 \epsilon^m T_\alpha^{(0)(m)} + o(\epsilon^7) \quad (14)$$

$$T_\alpha^{(0)(0)} = -e_\alpha, \quad T_\alpha^{(0)(1)} = 0, \quad T_\alpha^{(0)(2)} = 0$$

$$T_\alpha^{(0)(3)} = -\frac{15}{4} \omega^3 \sum_{i \neq 0} \left( \frac{\delta_{\alpha\eta}}{R_{i0}^6} - \frac{x_\alpha^{(i,0)} x_\eta^{(i,0)}}{R_{i0}^8} \right) e_\eta, \quad T_\alpha^{(0)(4)} = 0$$

$$T_\alpha^{(0)(5)} = -\frac{3}{4} \omega^3 \sum_{i \neq 0} \left( 13 \frac{\delta_{\alpha\eta}}{R_{i0}^8} - 9 \frac{x_\alpha^{(i,0)} x_\eta^{(i,0)}}{R_{i0}^{10}} \right) e_\eta$$

$$T_\alpha^{(0)(6)} = -\frac{75}{16} \omega^6 \sum_{i \neq 0} \frac{(8R_{i0}^4 - 3R_{i0}^2 \omega^2 + \omega^4)}{R_{i0}^{10} (R_{i0}^2 - \omega^2)^3} \left( \delta_{\alpha\eta} - \frac{x_\alpha^{(i,0)} x_\eta^{(i,0)}}{R_{i0}^2} \right) e_\eta$$

$$T_\alpha^{(0)(7)} = -6\omega^3 \sum_{i \neq 0} \left( 3 \frac{\delta_{\alpha\eta}}{R_{i0}^{10}} - 2 \frac{x_\alpha^{(i,0)} x_\eta^{(i,0)}}{R_{i0}^{12}} \right) e_\eta \quad (15)$$

где приняты обозначения:

$$x_\alpha^{(i,0)} = x_\alpha^{(i)} - x_\alpha^{(0)}; \quad R_{i0} = \sqrt{(x_\alpha^{(i,0)})^2}; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$\delta_{\alpha\eta}$  – символ Кронекера.

### 3. Вычисление средних характеристик

При заданном расположении в пространстве любого числа частиц формулы (14), (15) с высокой степенью точности определяют момент сил, действующих на тело. Однако для систем, содержащих очень большое количество дисперсных частиц, целесообразен переход к осредненному описанию. В данном случае при вычислении средней величины момента сил применима процедура осреднения [16,17] по различным конфигурациям дисперсных частиц в пространстве

$$\langle T_\alpha^{(0)} \rangle = \left\langle T_\alpha^{(0)} \middle| R_{i0} \geq \epsilon + \omega, R_{i0} \in V \right\rangle \quad (16)$$

Выражение в правой части равенства обозначает среднее по тем возможным конфигурациям, для которых частицы не пересекаются с твердой сферой и не выходят за границы объема  $V$ , занимаемого системой частиц.

Рассмотрим безграничную суспензию, в которой частицы статистически равномерно распределены в безграничной жидкости, а их объемная концентрация  $c$  в суспензии мала. В

этом случае весовой функцией в процедуре усреднения (16) будет числовая концентрация  $n_0$ , равная единице при выбранном линейном масштабе задачи (2). Если при вычислении средних величин ограничиться первым приближением по объемной концентрации  $c$ , то в формулах (15) необходимо учесть лишь члены, описывающие двух-частичные взаимодействия. Взаимодействия более высокого порядка вносят вклад только в коэффициенты при более высоких степенях объемной концентрации, поэтому в формулах (15) они заранее опущены.

Подставляя выражения (14) и (15) в соотношение (16) и проводя вычисления с учетом очевидного равенства  $4\pi n_0 \epsilon^3 = 3c$ , для средней величины момента сил, действующих на тело, получим

$$\langle T_\alpha^{(0)} \rangle = -e_\alpha (1 + k(\sigma)c) \quad (17)$$

$$k(\sigma) = \frac{5}{2(1+\sigma)^3} + \frac{9\sigma^2}{2(1+\sigma)^5} + \frac{6\sigma^4}{5(1+\sigma)^7} - \frac{25}{8}\sigma \left( -\frac{3}{14(1+\sigma)^7} + \frac{3}{7(1+\sigma)^6} - \frac{3}{14(1+\sigma)^5} - \frac{5}{2(1+\sigma)^3} + \frac{5}{(1+\sigma)^2} - \frac{53}{2(1+\sigma)} - \frac{9}{4(2+\sigma)^2} - \frac{21}{2+\sigma} + \frac{285}{8} \left( 1 - \sigma - \frac{1}{2}\sigma^2 \ln \frac{\sigma}{2+\sigma} \right) \right) \quad (18)$$

где  $\sigma = a/b$  – отношение радиуса частиц к радиусу твердой сферы.

График функции  $k(\sigma)$  на отрезке  $0 \leq \sigma \leq 1$  представлен на рис. 1 кривой 3.

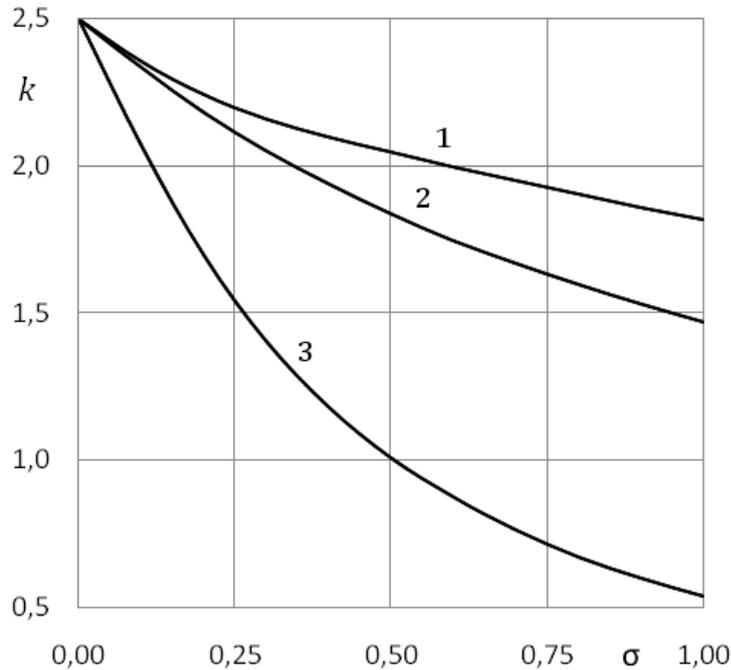


Рис. 1. Зависимость  $k(\sigma)$  в формуле для эффективной вязкости суспензии  $\bar{\mu} = \mu (1 + k(\sigma)c)$  для случаев: 1 – поступательное движение твердой сферы в суспензии; 2 – поступательное движение сферического пузыря в суспензии; 3 – вращение твердой сферы в суспензии

Для «точечных» частиц в дисперсной фазе в пределе при  $\sigma \rightarrow 0$  коэффициент  $k(0) = 5/2$ . В этом случае выражение в скобках в формуле (17), имеющее смысл безразмерной эффективной вязкости среды, в которой вращается твердая сфера, в точности соответствует резуль-

тату Эйнштейна [19]. Однако с увеличением значения переменной  $\sigma$  функция  $k(\sigma)$  убывает, стремясь к нулю при  $\sigma \rightarrow \infty$ , и ее значения могут существенно отличаться от коэффициента Эйнштейна. Например, когда размер сферы совпадает с размером частиц ( $\sigma = 1$ ), ее значение  $k(1) \approx 0.51$ .

Анализ членов  $o(\epsilon^7)$ , возникающих в формуле (14) после решения системы (11–13) и последующей процедуры осреднения (16), показывает, что их вклад в коэффициент  $k(\sigma)$  не превышает 2%.

В порядке сравнения следует отметить, что применение описанной выше процедуры к задачам о поступательном движении твердой сферы [18] и сферического пузыря [20] с заданной скоростью в вязкой суспензии приводит к другим функциональным зависимостям  $k(\sigma)$  в формуле для эффективной вязкости вида (1). Графики этих функций изображены на рисунке 1 кривыми 1 и 2 соответственно.

#### 4. Обсуждение результатов и выводы

Отличительной особенностью полученных результатов (кривые 1–3 на рис. 1) является то, что все функции  $k(\sigma)$  имеют одинаковую асимптотику в нуле и на бесконечности. При  $\sigma \rightarrow 0$ , когда размер дисперсных частиц пренебрежимо мал по сравнению с размером тела, значения все трех функций совпадают друг с другом и с результатом Эйнштейна для эффективной вязкости разбавленной суспензии твердых сферических частиц. Физически это означает, что для «точечных» частиц в дисперсной фазе эффективная вязкость не зависит от граничных условий на поверхности тела и характера его движения в суспензии. Это вполне соответствует понятию вязкости ньютоновской сплошной среды. Однако для частиц конечного размера при  $\sigma \neq 0$  значения всех трех функций отличаются друг от друга и от результата Эйнштейна. Физически это означает, что в этом случае эффективная вязкость зависит не только от параметров суспензии, в которой движется тело, но и от физических и геометрических параметров самого тела и характера его движения в среде. Строго говоря, это противоречит представлению о суспензии как о ньютоновской сплошной среде, так как понятие вязкости имеет смысл только тогда, когда она зависит только от параметров самой среды.

Эти выводы следуют из полученных результатов, если при  $\sigma \neq 0$  априори исходить из представлений о суспензии как о сплошной среде. Однако возможна иная интерпретация полученных результатов. Зависимость эффективной вязкости суспензии от физических и геометрических параметров тела, движущегося в ней, возможно, следует считать следствием того, что по мере роста размера дисперсных частиц, т.е. с увеличением значения параметра  $\sigma$ , суспензия перестает соответствовать понятию сплошной среды. В этом случае, очевидно, теряет смысл само понятие вязкости суспензии, а коэффициент  $(1 + k(\sigma))c$  в формулах Стокса для силы сопротивления и момента сил, действующих на тело, просто описывает результат гидродинамического взаимодействия дисперсных частиц конечного размера и тела в жидкости.

Следует также отметить, что зависимость эффективной вязкости от масштабного фактора должна возникать в любых задачах, в которых помимо расстояния между дисперсными частицами существует еще хотя бы один характерный линейный размер. Таковым, например, может быть размер канала в задачах о течении суспензий при наличии внешних границ.

#### Литература

1. Cunningham E. On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1910. V. 83. P. 357–365.
2. Smoluchowski M.S. Uber die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zahren Flussigkeit bewegen // Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie. Ser. 1A. 1911. P. 28–39.

3. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Кульбицкий Ю.Н. Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 1. С.65–68.
4. Гуськов О.Б., Струминский В.В. Динамика дисперсных потоков в присутствии границ // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 832–835.
5. Гуськов О.Б., Золотов А.В. Об осаждении суспензии сферических частиц в цилиндре // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 968–972.
6. Гуськов О.Б. О взаимодействии частиц в вязкой жидкости в присутствии границ // В сб.: Гидродинамические проблемы технологических процессов. – М.: Наука, 1988. С. 71–77.
7. Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А. Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 820–824.
8. Гуськов О.Б., Бошнятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // Докл. Акад. Наук. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
9. Гуськов О.Б. О присоединенной массе тела, движущегося в суспензии сферических частиц // Докл. Акад. Наук. 2012. Т. 442. № 1. С. 50–53.
10. Гуськов О.Б. Присоединенная масса сферы в суспензии сферических частиц // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 134–139.
11. Бошнятов Б.В. Гидродинамическое взаимодействие и присоединенная масса дисперсных частиц // Известия ВУЗ. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 50–60.
12. Бошнятов Б.В. К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // Докл. Акад. Наук. 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.
13. Бошнятов Б.В. К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 3. С. 67–73.
14. Гуськов О.Б. Метод самосогласованного поля применительно к динамике вязких суспензий // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 557–572.
15. Schmitz R., Felderhof B.U. Creeping flow about a sphere // Physica A. 1978. V. 92. Issues 3–4. P. 423–437.
16. Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. Pt. 2. P. 245–268.
17. Beenakker C.W.J., Mazur P. Is sedimentation container-shape dependent? // Phys. Fluids. 1985. V. 28. No. 11. P. 3203–3206.
18. Гуськов О.Б. О движении сферического тела в вязкой суспензии // Докл. Акад. Наук. 2014. Т. 456. № 4. С. 420–423.
19. Einstein A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen // Ann. Physik. 1906. V. 19. P. 289–306.
20. Гуськов О.Б. К вопросу об эффективной вязкости разбавленной суспензии твердых сферических частиц // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 5. С. 644–652.
21. Happel J.R., Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics. – Springer. 1965. 533 p.

Статья поступила в редакцию 12 ноября 2015 г.